

আদর্শ পাটীগণিত ও বীজগণিত

[নবম শ্রেণীর পাঠ্য]

শ্রীমনোমোহন রায়চৌধুরী

ও

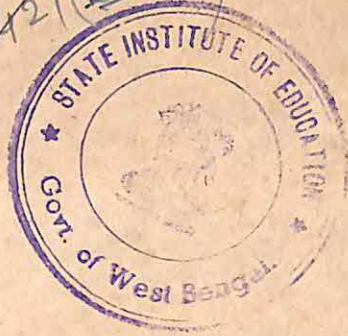
শ্রীউপেন্দ্রনাথ রায়চৌধুরী



দি সেন্ট্রাল বুক এজেন্সী • কলিকাতা

3421/6495

3421



আদর্শ পাঠ্যগণিত ও বীজগণিত

(নবম শ্রেণীর পাঠ্য)

৩৫/১১



কলিকাতা গভর্নমেন্ট মডেল স্কুলের ভূতপূর্ব হেডমাষ্টার ; কলিকাতা নর্ম্যান ট্রেনিং স্কুল,
বারাকপুর গভর্নমেন্ট স্কুল, নবাব বাহাডুর ইনষ্টিটিউশন, কলিকাতা সংস্কৃত কলিজিয়েট
স্কুল ও হিন্দু স্কুলের ভূতপূর্ব প্রধান গণিত শিক্ষক এবং আদর্শ জ্যামিতি ও পরিমিতি
(৯ম শ্রেণী), আদর্শ গণিত (৬ষ্ঠ শ্রেণী), আদর্শ জ্যামিতি (৮ষ্ঠ শ্রেণী), এবং পর্যদ কর্তৃক
অনুমোদিত প্রবেশিকা জ্যামিতি (৭ম-৮ম শ্রেণী), সহজ বীজগণিত (৭ম-৮ম শ্রেণী)
প্রভৃতির গ্রন্থকার

শ্রীমনোমোহন রায়চৌধুরী, এম্. এ., বি. টি.

ও

ভূতপূর্ব শিক্ষক

শ্রীউপেন্দ্রনাথ রায়চৌধুরী, বি. এম্-সি.

প্রণীত

COMPLIMENTARY COPY



দি সেন্ট্রাল বুক এজেন্সী

১৪, বক্ষিয় চ্যাটার্জি স্ট্রীট · কলিকাতা-১২

প্রথম মুদ্রণ—ডিসেম্বর, ১৯৭৩

3.1.2008
2963

প্রকাশক :

দি সেন্ট্রাল বুক এজেন্সীর পক্ষে,

শ্রীযোগেন্দ্রনাথ সেন, বি. এম্-সি.

১৪নং বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট

কলিকাতা-১২

মুদ্রাকর :

শ্রীপার্বতীচরণ রায়

দি গৌতম প্রিন্টিং ওয়ার্কস্

২০২-এ বিধান সরণী

কলিকাতা-৬

দাম চার টাকা

RS 4' 8' 00

SYLLABUS IN MATHEMATICS

The aim of teaching Arithmetic and Algebra at Secondary School level is

- (i) to make the pupils familiar with number system and basic operation on them and laws related to these operations,
- (ii) to acquire knowledge of manipulation with the elements of number system so as to make use of them in problems of daily life.

CLASS IX

ARITHMETIC

Ratio—Proportion and Percentage. (Problems may be solved Algebraically.)

Allotment of marks for final examination at the end of Class X :

Algebra	...	...	30
Geometry	...	...	30
Arithmetic	...	342.1	15
Mensuration	...	...	10
Trigonometry	...	...	15
			100

ALGEBRA

1. Revision of previous work.
2. Harder problems leading to equation—simple and simultaneous.
3. Graphs of simple equation—Application.

সূচীপত্র পাটীগণিত

বিষয়	পৃষ্ঠা
শতকরা বলিতে কি বুঝায়	1
শতকরা বিষয়ক প্রয়োজনীয় সূত্র	1
কমিশন বা দালালি ও প্রিমিয়ম	7
অনুপাত	8
পূর্বরাশি ও উত্তররাশি	8
ব্যস্ত বা বিপরীত অনুপাত	8
সরল অনুপাত	8
মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত	8
সমানুপাত	9
প্রান্তীয় রাশি	9
মধ্যরাশি	9
চতুর্থ সমানুপাতী	9
ক্রমিক সমানুপাতী	9
মধ্য সমানুপাতী	10
তৃতীয় সমানুপাতী	10
অনুপাত ও সমানুপাত বিষয়ক বিবিধ প্রশ্ন	11
সমানুপাতিক ভাগ	16
সঙ্কল্প সমুখান	19
সরল সঙ্কল্প সমুখান	19
মিশ্র সঙ্কল্প সমুখান	20
মিশ্রণ	22
দুই দ্রব্যের মিশ্রণ	22
দুই এর অধিক দ্রব্যের মিশ্রণ	24
উত্তরমালা	29

বীজগণিত

বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা গুণন	1
বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ	2
গুণ ও ভাগে বন্ধনীর ব্যবহার	4
সূত্রাবলী ও তাহাদের সহজ প্রয়োগ	5
$x^2 + px + q$ এর আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়	12

বিষয়	পৃষ্ঠা
px^2+qx+r এর আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়	15
দুই অক্ষরবিশিষ্ট দ্বিতীয় মানের সাধারণ রাশি	16
a^2-b^2 , $a^3 \pm b^3$, $a^5 \pm b^5$ প্রভৃতি দ্বিপদ রাশি	17
বিপরীত রাশিমাল	18
উৎপাদক নির্ণয়ের কৌশল	18
চক্রক্রম	22
উৎপাদকের সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়	27
বহুপদ রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়	28
উৎপাদকের সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়	29
বহুপদ রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়	30
দুইটি বহুপদ রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী	31
তিন বা ততোধিক রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী	34
গ. সা. গু. এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়	35
তিন বা ততোধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়	36
গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. ঘটতি বিবিধ প্রশ্ন	37
ভগ্নাংশ	39
ভগ্নাংশের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম	39
ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন	39
দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করা	40
ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ	41
চক্র-ক্রমিক ভগ্নাংশ	44
ভগ্নাংশের গুণন	46
ভগ্নাংশের ভাগ	47
জটিল ভগ্নাংশ	48
ক্রমিক ভগ্নাংশ	49
সহজ অভেদাবলী	50
সাপেক্ষ সহজ অভেদাবলী	52
ভগ্নাংশঘটিত সহজ অভেদাবলী	58
সরল সমীকরণ	63
আক্ষরিক সহগ সংবলিত সমীকরণ	63
লবে বিद्यমান অজ্ঞাত রাশি সংবলিত সরল সমীকরণ	64
হরে বিद्यমান অজ্ঞাত রাশি সংবলিত সরল সমীকরণ	66
লব ও হরে বিद्यমান অজ্ঞাত রাশি সংবলিত সরল সমীকরণ	68
দ্বিবর্গ সরল সহ-সমীকরণ	71

বিষয়	পৃষ্ঠা
সরল বা একঘাত সহ-সমীকরণ	71
তুলনামূলক পদ্ধতির সাহায্যে সহ-সমীকরণ সমাধান	72
পরিবর্ত পদ্ধতির সাহায্যে সহ-সমীকরণ সমাধান	73
অপনয়ন পদ্ধতির সাহায্যে সহ-সমীকরণ সমাধান	73
বজ্রগুণন পদ্ধতির সাহায্যে সহ-সমীকরণ সমাধান	75
সরল সমীকরণঘটিত প্রশ্নাবলী	78
সহ-সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী	86
অপেক্ষকের লেখচিত্র	91
সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের প্রণালী	91
লেখচিত্র অঙ্কনের কতিপয় কৌশল	92
একবর্ণ সরল সমীকরণের লেখচিত্র	92
দ্বিবর্ণ সরল সমীকরণের লেখচিত্র	93
$y = mx + c$ এর আকারবিশিষ্ট সমীকরণের লেখচিত্র	94
$x/a + y/b = 1$ এর আকারবিশিষ্ট এবং ঐ আকারে প্রকাশযোগ্য সমীকরণের লেখচিত্র	95
লেখচিত্রের প্রয়োগ	98
মূল্য-লেখ	98
গতি-লেখ	99
প্রশ্ন সমাধানে লেখচিত্রের প্রয়োগ	99
উত্তরমালা	...

সাংখ্যিক

শতকরা হিসাব

1. শতকরা শব্দে প্রতিশতে বুঝায়। কাজেই 'শতকরা 7', $\frac{7}{100}$, '07 এবং 7% একার্থক। সুতরাং শতকরা জ্ঞাপক সংখ্যাকে 100 দ্বারা ভাগ করিলে উহার তুল্যমান সামান্য ভগ্নাংশটি পাওয়া যায়। যেমন, আয়ের 'শতকরা নয়' = আয়ের $\frac{9}{100}$, $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$, $62\frac{1}{2}\% = \frac{125}{2 \times 100} = \frac{5}{8}$, $137\frac{1}{2}\% = \frac{275}{2 \times 100} = \frac{11}{4} = 1\frac{3}{4}$.

পক্ষান্তরে, কোন সামান্য ভগ্নাংশকে 100 দ্বারা গুণ করিলে শতকরা হার পাওয়া যায়। যেমন, আয়ের $\frac{3}{4}$ = আয়ের শতকরা 75, $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 100}{8} = 62\frac{1}{2}\%$, $1\frac{3}{4} = \frac{7 \times 100}{4} = 175\%$.

2. শতকরা বিষয়ক প্রয়োজনীয় সূত্র।

প্রতি বৎসর 3% করিয়া লোকসংখ্যা বাড়িলে 100 জনে 1 বৎসরে 103 জন হয়। সুতরাং বর্তমান লোকসংখ্যা x হইলে 1 বৎসরে লোকসংখ্যা হইবে $x \times \frac{103}{100}$, 2 বৎসরে হইবে $(x \times \frac{103}{100}) \times \frac{103}{100}$ বা $x(\frac{103}{100})^2$, 3 বৎসরে হইবে $x(\frac{103}{100})^3$ বা $x(1 + \frac{3}{100})^3$, ইত্যাদি।

অনুরূপে, প্রতি বৎসর 3% করিয়া লোকসংখ্যা কমিলে, 1 বৎসরে লোকসংখ্যা হইবে $x \times \frac{97}{100}$, 2 বৎসরে হইবে $x(\frac{97}{100})^2$, 3 বৎসরে হইবে $x(\frac{97}{100})^3$ বা $x(1 - \frac{3}{100})^3$, ইত্যাদি। ইহা হইতে নিম্নের সূত্রদ্বয় পাওয়া যায়।

সূত্র। যদি বর্তমান লোকসংখ্যা x হয়, তবে প্রতি বৎসর লোকসংখ্যা $r\%$ করিয়া বাড়িলে n বৎসরে লোকসংখ্যা হইবে $x(1 + \frac{r}{100})^n$ এবং প্রতি বৎসর লোকসংখ্যা $r\%$ করিয়া কমিলে n বৎসরে লোকসংখ্যা হইবে $x(1 - \frac{r}{100})^n$.

উদাহরণ 1. এক ব্যক্তির মূলধন প্রতি বৎসর 25% করিয়া কমিয়া গিয়া 3 বৎসরে 3375 টাকা হইল। 3 বৎসর পূর্বে তাহার মূলধন কত ছিল?

নির্ণয়ে মূলধন x টাকা হইলে, $x(1 - \frac{25}{100})^3 = 3375$,

বা $x(\frac{3}{4})^3 = 3375$, বা $x = 3375 \times \frac{64}{27} = 8000$

∴ নির্ণয়ে মূলধন = 8000 টাকা।

উদাহরণ 2. ক এর আয় অপেক্ষা খ এর আয় 20% অধিক এবং গ এর আয় 10% কম। খ এর আয় অপেক্ষা গ এর আয় শতকরা কত কম?

ক এর আয় 100 টাকা হইলে খ এর আয় 120 টাকা এবং গ এর আয় 90 টাকা। সুতরাং খ এর আয় 120 টাকা হইলে গ এর আয় 90 টাকা; সুতরাং খ এর আয় 100 টাকা হইলে গ এর আয় $\frac{90 \times 100}{120}$ টাকা বা 75 টাকা।

∴ খ এর আয় অপেক্ষা গ এর আয় শতকরা $(100 - 75)$ বা 25% কম।

অথবা, ক এর আয় যেন x . তাহা হইলে, খ এর আয় $\frac{120}{100}x$ বা $\frac{6}{5}x$ এবং গ এর আয় $\frac{90}{100}x$ বা $\frac{9}{10}x$.

$\therefore$ খ এর আয় $\frac{6}{5}x$ হইলে গ এর আয় $\frac{9}{10}x$.

$\therefore$ খ এর আয় 100 হইলে গ এর আয় $\frac{9}{10} \times \frac{5}{6} \times 100$ বা 75

$\therefore$ খ এর আয় অপেক্ষা গ এর আয় শতকরা $(100 - 75)$ বা 25% কম।

উদাহরণ 3. 40 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 60% দুধ আছে। উহাতে কত লিটার দুধ মিশাইলে নূতন মিশ্রণে 80% দুধ থাকিবে?

40 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 40 লিটারের 60% বা 24 লিটার দুধ এবং বাকি $(40 - 24)$ বা 16 লিটার জল আছে। নূতন মিশ্রণে দুধ 80% এবং জল 20% থাকিবে, অর্থাৎ নূতন মিশ্রণে দুধ ও জলের অনুপাত 80 : 20 বা 4 : 1 হইবে।

মনে কর, 40 লিটার জলমিশ্রিত দুধের সহিত x লিটার দুধ মিশাইতে হইবে

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\frac{24 + \frac{6}{5}x}{40 + x} = \frac{4}{5}$, বা $24 + x = 64$ $\therefore x = 40$.

$\therefore$ 40 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 40 লিটার দুধ মিশাইতে হইবে।

উদাহরণ 4. আটার দর 20% কমিয়া যাওয়ায় 480 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 3 কুইন্টেল আটা অধিক পাওয়া গেল। 1 কুইন্টেল আটার পূর্বদর ও বর্তমান দর কত?

মনে কর, 1 কুইন্টেল আটার পূর্বদর x টাকা; সুতরাং 1 কুইন্টেল আটার বর্তমান দর $(x - \frac{20}{100}x)$ বা $\frac{4}{5}x$ টাকা।

পূর্বদরে 480 টাকায় পাওয়া যায় $\frac{480}{x}$ কুইন্টেল এবং বর্তমান দরে পাওয়া যায় $\frac{480}{\frac{4}{5}x}$ বা $\frac{600}{x}$ কুইন্টেল।

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{600}{x} - \frac{480}{x} = 3$, বা $\frac{120}{x} = 3$, বা $3x = 120$ $\therefore x = 40$

$\therefore$ 1 কুইন্টেল আটার পূর্বদর 40 টাকা।

$\therefore$ 1 কুইন্টেল আটার বর্তমান দর $= \frac{4}{5}x$ টাকা $= (\frac{4}{5} \times 40)$ টাকা $= 32$ টাকা।

উদাহরণ 5. আমের দর 25% বাড়িয়া যাওয়ায় 12 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 36টি আম কম পাওয়া গেল। আমের পূর্বদর ও বর্তমান দর কত?

মনে কর, 1টি আমের পূর্বদর x টাকা; সুতরাং 1টি আমের বর্তমান দর $(x + \frac{25}{100}x)$ বা $\frac{5}{4}x$ টাকা।

পূর্বদরে 12 টাকায় পাওয়া যায় $\frac{12}{x}$ আম এবং বর্তমান দরে পাওয়া যায় $\frac{12}{\frac{5}{4}x}$ বা $\frac{48}{5x}$ আম।

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{12}{x} - \frac{48}{5x} = 36$, বা $60 - 48 = 180x$, বা $15x = 1$ $\therefore x = \frac{1}{15}$

$\therefore$ 1টি আমের পূর্বদর $\frac{1}{15}$ টাকা; $\therefore$ আমের পূর্বদর টাকায় 15টি।

আবার, 1টি আমের বর্তমান দর $= \frac{5}{4}x$ টাকা $= \frac{5}{4} \times \frac{1}{15}$ টাকা $= \frac{1}{12}$ টাকা

$\therefore$ আমের বর্তমান দর টাকায় 12টি।

উদাহরণ 6. ময়দার দর 20% কমিয়া যাওয়ায় এক ব্যক্তি ময়দার ব্যবহার এইরূপে বাড়াইলেন যে, তাহাতে ময়দা বাবদ খরচ পূর্ববৎ রহিল। ঐ ব্যক্তি ময়দার পরিমাণ শতকরা কত বাড়াইলেন ?

পূর্বদরে 100 টাকায় যে পরিমাণ ময়দা পাওয়া যাইত, বর্তমান দরে 80 টাকায় সেই পরিমাণ ময়দা পাওয়া যায়। সুতরাং 100 টাকায় সেই পরিমাণ ময়দার $\frac{100}{80}$ গুণ বা $1\frac{1}{4}$ গুণ পাওয়া যায়।

∴ ঐ ব্যক্তি ময়দার পরিমাণ $(1\frac{1}{4} - 1)$ বা $\frac{1}{4}$, অর্থাৎ 25% বাড়াইলেন।

উদাহরণ 7. কয়লার দর 28% বাড়িয়া যাওয়ায় এক ব্যক্তি কয়লার পরিমাণ এইরূপ কমাইলেন যে, তাহাতে কয়লা বাবদ খরচ পূর্বাপেক্ষা শতকরা 12 টাকা অধিক হইল। ঐ ব্যক্তি কয়লার পরিমাণ শতকরা কত কমাইলেন ?

পূর্বদরে 100 টাকায় যে পরিমাণ কয়লা পাওয়া যাইত, বর্তমান দরে 128 টাকায় সেই পরিমাণ কয়লা পাওয়া যায়। সুতরাং 112 টাকায় সেই পরিমাণ কয়লার $\frac{112}{88}$ বা $\frac{7}{5}$ পাওয়া যায়।

∴ ঐ ব্যক্তি কয়লার পরিমাণ $(1 - \frac{7}{8})$ বা $\frac{1}{8}$, অর্থাৎ 12½% কমাইলেন।

উদাহরণ 8. কোন গ্রামের লোকসংখ্যা 800. যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বেশি হইত এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 5% কম হইত, তবে লোকসংখ্যা 805 হইত। স্ত্রীলোকের সংখ্যা কত ?

যদি পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা 10% বেশি হইত, তবে লোকসংখ্যা 800 এর $\frac{110}{100}$ বা 880 হইত।

∴ পুরুষের সংখ্যার 110% + স্ত্রীলোকের সংখ্যার 110% = 880

আবার, পুরুষের সংখ্যার 110% + স্ত্রীলোকের সংখ্যার 95% = 805

∴ বিয়োগ করিয়া, স্ত্রীলোকের সংখ্যার 15% = 75

∴ স্ত্রীলোকের সংখ্যা = $75 \div \frac{15}{100} = 500$.

উদাহরণ 9. কোন পরীক্ষায় ছাত্রদের 28% গণিতে, 22% বাংলায় এবং 10% উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য হইল। যদি 300 জন ছাত্র উভয় বিষয়ে কৃতকার্য হইয়া থাকে, তবে কত জন ছাত্র শুধু গণিতে অকৃতকার্য হইয়াছিল ?

শতকরা 10 জন উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য হইয়াছে; সুতরাং শতকরা $(28 - 10)$ বা শতকরা 18 জন শুধু গণিতে এবং শতকরা $(22 - 10)$ বা শতকরা 12 জন শুধু বাংলায় অকৃতকার্য হইয়াছে। সুতরাং শতকরা $(18 + 12 + 10)$ বা শতকরা 40 জন শুধু গণিতে, শুধু বাংলায় এবং উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য হইয়াছে। কাজেই শতকরা $(100 - 40)$ জন বা শতকরা 60 জন উভয় বিষয়ে কৃতকার্য হইয়াছে। এখন, প্রশ্নানুসারে ছাত্রসংখ্যার 60% = 300, সুতরাং ছাত্রসংখ্যা $18\% = 300 \times \frac{18}{60} = 90$.

∴ 90 জন ছাত্র শুধু গণিতে অকৃতকার্য হইয়াছিল।

উদাহরণ 10. এক পরীক্ষায় ছাত্রদের 80% পড়ায়, 70% লেখায় এবং 150 জন উভয় বিষয়ে কৃতকার্য হইল। ছাত্রদের সকলেই অন্ততঃ এক বিষয়ে কৃতকার্য হইয়া থাকিলে, তাহাদের সংখ্যা কত? (D. B. 1939)

ছাত্রদের শতকরা 20 জন পড়ায় এবং শতকরা 30 জন লেখায় অকৃতকার্য হইয়াছে; কিন্তু তাহাদের কেহই উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য হয় নাই। সুতরাং শতকরা (20+30) বা শতকরা 50 জন হয় পড়ায়, না হয় লেখায় অকৃতকার্য হইয়াছে। সুতরাং বাকি শতকরা 50 জন উভয় বিষয়ে কৃতকার্য হইয়াছে।

$$\therefore \text{ছাত্রসংখ্যার } 50\% \text{ বা ছাত্রসংখ্যার } \frac{50}{100} = 150$$

$$\therefore \text{ছাত্রসংখ্যা} = 150 \times \frac{100}{50} = 300.$$

প্রশ্নমালা 1

1. সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত কর : 75% , $3\frac{1}{8}\%$, $33\frac{1}{3}\%$, 125% , $287\frac{1}{2}\%$.
2. শতকরা হারে পরিণত কর : $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{7}{8}$.
3. এক ব্যক্তির আয় প্রতি বৎসর 10% করিয়া বাড়িয়া 3 বৎসরে 5324 টাকা হইল। 3 বৎসর পূর্বে তাহার আয় কত ছিল?
4. কোন সহরের লোকসংখ্যা প্রতি 10 বৎসরে 25% করিয়া কমিয়া 30 বৎসরে 3375 হইল। 30 বৎসর পূর্বে লোকসংখ্যা কত ছিল?
5. এক ব্যক্তির আয় প্রতি বৎসর 25% করিয়া 3 বৎসর বাড়িল এবং পরে ঐ বর্ধিত আয় প্রতি বৎসর 40% করিয়া 2 বৎসর কমিল। ইহাতে তাহার বার্ষিক আয় 9000 টাকার দাঁড়াইল। তাহার আয় প্রথমে কত ছিল?
6. ক এর আয় অপেক্ষা খ এর আয় 50% অধিক এবং গ এর আয় 25% কম। গ এর আয় অপেক্ষা খ এর আয় শতকরা কত অধিক?
7. ক এর আয় অপেক্ষা খ এর আয় 5% অধিক এবং গ এর আয় 40% অধিক। গ এর আয় অপেক্ষা খ এর আয় শতকরা কত কম?
8. একটি বাঞ্চে যত অর্থ ছিল, তাহার 20% তুলিয়া উহার 80% বাঞ্চেটিতে রাখিলাম। ইহাতে আমার নিকট 15 টাকা রহিল। বাঞ্চেটিতে প্রথমে কত ছিল?
9. কোন স্কুলে চারিটি শ্রেণী এবং শ্রেণীগুলির ছাত্রসংখ্যা পরস্পর সমান। এক দিন শ্রেণীগুলিতে যথাক্রমে 5%, $7\frac{1}{2}\%$, 10% ও $12\frac{1}{2}\%$ ছাত্র অনুপস্থিত ছিল। ঐ দিন শতকরা কত ছাত্র উপস্থিত ছিল?
10. একটি আয়তের দৈর্ঘ্য 10% কমাইলে এবং প্রস্থ 10% বাড়াইলে আয়তটির ক্ষেত্রফল শতকরা কত কমিবে বা বাড়িবে?
11. এক পরীক্ষায় ক অপেক্ষা খ 16 নম্বর বেশি পাওয়ায় ক এর নম্বর উভয়ের নম্বরের সমষ্টির 45% হইল। কে কত নম্বর পাইয়াছিল?
[ক x নম্বর পাইলে খ পায় $(x+16)$ নম্বর এবং
সর্তাসারে $x/\{x+(x+16)\} = \frac{45}{100}$]

12. কোন বাগানে 75% আম গাছ এবং বাকি জাম গাছ। 60টি আম গাছ মরিয়া যাওয়ায় 60টি জাম গাছ বসান হইল। ইহাতে বাগানে 40% জাম গাছ হইলে, মোট গাছের সংখ্যা কত ?

[মোট গাছের সংখ্যা x হইলে $(\frac{1}{4}x + 60) = \frac{40}{100}x$]

13. এক ফল বিক্রেতার যতগুলি আম ছিল, তাহার 20% ক এর নিকট এবং অবশিষ্টের 15% খ এর নিকট বিক্রয় করিয়া দেখিল, তাহার নিকট 306টি আম রহিয়াছে। প্রথমে তাহার কয়টি আম ছিল ?

14. এক দোকানদার তাহার মূলধনের শতকরা 25 টাকা খরচ করিয়া পরে অবশিষ্টের শতকরা $16\frac{2}{3}$ খরচ করিয়া দেখিল, তাহার মোট 150 টাকা খরচ হইয়াছে। তাহার মূলধন কত ছিল ?

15. এক ব্যক্তির নিকট যত টাকা ছিল, তাহার $12\frac{1}{2}$ % খরচ করিয়া পরে অবশিষ্টের 20% খরচ করিল। ইহাতে তাহার নিকট 287 টাকা রহিল। প্রথমে তাহার নিকট কত টাকা ছিল ?

16. এক ব্যক্তি কিছু মূলধন লইয়া এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। প্রথম বৎসর তাহার মূলধন শতকরা 20 টাকা বৃদ্ধি পাইল কিন্তু দ্বিতীয় বৎসর ঐ বর্ধিত মূলধনের শতকরা $37\frac{1}{2}$ টাকা কমিয়া গিয়া মূলধন 3840 টাকা হইল। প্রথমে তাহার মূলধন কত ছিল ?

17. দ্রব্যনির্মাতা ব্যবসায়ীর নিকট এবং ব্যবসায়ী ক্রেতার নিকট 10% লাভে জিনিস বিক্রয় করে। একজন ক্রেতা কোন জিনিস 605 টাকায় ক্রয় করিল। দ্রব্যটির নির্মাণব্যয় অপেক্ষা তাহাকে কত অধিক দিতে হইল ? (C. U. 1931)

18. এক গ্রামে যত লোক ছিল, তাহার 10% মারা গেল এবং অবশিষ্টের 20% পলাইয়া গেল। ইহাতে গ্রামটিতে 504 জন লোক রহিল। ঐ গ্রামের লোকসংখ্যা প্রথমে কত ছিল ? (S. F. 1958)

19. এক বিদ্যালয়ের শতকরা 68 জন ছাত্র হিন্দু এবং অবশিষ্টের শতকরা $87\frac{1}{2}$ জন ছাত্র মুসলমান। যদি হিন্দু ছাত্রের সংখ্যা মুসলমান ছাত্রের সংখ্যা অপেক্ষা 80 অধিক হয়, তবে ঐ বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যা কত ?

20. 2500 পরীক্ষার্থীর ভিতর $\frac{1}{4}$ অংশ বালিকা এবং অবশিষ্টাংশ বালক। বালকদের 36% এবং বালিকাদের 40% অকৃতকার্য হইল। পরীক্ষার্থীদের শতকরা কত জন কৃতকার্য হইল ? (S. F. 1960)

21. দানপত্র মূলে ক, খ ও গ 18000 টাকা পাইল। 15% ট্যাক্স দেওয়ার পর বাকি টাকা তাহারা ভাগ করিয়া নিল। ইহাতে খ এর দ্বিগুণ ক এবং গ এর তিন গুণ খ পাইল। কে কত পাইল ? (S. F. 1960)

22. দুইটি পাত্রের প্রথমটিতে 36 লিটার এবং দ্বিতীয়টিতে 24 লিটার জলমিশ্রিত দুধ আছে। প্রথম পাত্রের দুধে 25% জল এবং দ্বিতীয় পাত্রের দুধে $87\frac{1}{2}$ % দুধ আছে। পাত্র দুইটির দুধ অপর একটি পাত্রে ঢালিলে শেযোক্ত পাত্রের দুধে শতকরা কত লিটার জল থাকিবে ?

23. 200 গ্যালন জলমিশ্রিত দুধের $12\frac{1}{2}\%$ জল। উহার সহিত কত জল মিশাইলে নতুন মিশ্রণে $37\frac{1}{2}\%$ জল থাকিবে? (S. F. 1962)

24. চিনির দর 10% বাড়িয়া যাওয়ায় 10% চিনি কমাইলাম। ইহাতে আমার খরচ শতকরা কত কমিল বা বাড়িল?

25. চাউলের দর 25% কমিয়া যাওয়ায় 720 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 5 কুইন্টেল চাউল অধিক পাওয়া গেল। 1 কুইন্টেল চাউলের বর্তমান দর ও পূর্বদর কত?

26. আমের দর 20% বাড়িয়া যাওয়ায় 15 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 45টি আম কম পাওয়া গেল। আমের বর্তমান দর ও পূর্বদর টাকায় কয়টি?

27. যদি চিনির দর 20% বাড়িয়া যায়, তবে শতকরা কত অংশ চিনি কিনিলে চিনি বাবদ খরচ পূর্ববৎ থাকিবে?

28. যদি কাপড়ের দর 75% বাড়িয়া যায়, তবে কাপড়ের পরিমাণ শতকরা কত কমাইলে কাপড় বাবদ খরচ পূর্ববৎ থাকিবে? (C. U. 1922)

29. আটার দর 20% কমিয়া যাওয়ায় এক ব্যক্তি আটার ব্যবহার এরূপ বাড়াইলেন যে, তাহাতে আটা বাবদ খরচ পূর্বাপেক্ষা 8% অধিক হইল। ঐ ব্যক্তি আটার পরিমাণ শতকরা কত বাড়াইলেন?

30. ডালের দর 15% বাড়িয়া যাওয়ায় এক ব্যক্তি ডালের ব্যবহার এরূপে কমাইলেন যে, তাহাতে ডাল বাবদ খরচ পূর্বাপেক্ষা 8% কম হইল। ঐ ব্যক্তি ডালের পরিমাণ শতকরা কত কমাইলেন?

31. কোন সহরের লোকসংখ্যা 20000. যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বেশি এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% কম হইত, তবে লোকসংখ্যা ঠিকই থাকিত। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা কত? (C. U. 1937)

32. কোন সহরের দুই অঞ্চলের লোকসংখ্যা সমান ছিল। এক অঞ্চলের লোকসংখ্যা 20% কমায় এবং অপর অঞ্চলের লোকসংখ্যা 15% বাড়ায় দুই অঞ্চলের মোট লোকসংখ্যা 39390 হইল। প্রত্যেক অঞ্চলের লোকসংখ্যা প্রথমে কত ছিল? (S. F. Compt. 1963)

33. 5টি গরু ও 8টি ঘোড়ার মূল্য 680 টাকা। যদি গরুগুলির মূল্য শতকরা 15 টাকা বেশি হইত এবং ঘোড়াগুলির মূল্য শতকরা 10 টাকা কম হইত, তবে উহাদের মূল্য 662 টাকা হইত। একটি গরুর মূল্য ও একটি ঘোড়ার মূল্য কত?

34. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 34% পাটীগণিতে এবং 42% বীজগণিতে ফেল করিল। যদি 20% উভয় বিষয়ে ফেল করিয়া থাকে, তবে শতকরা কত জন উভয় বিষয়ে পাস করিয়াছিল? (C. U. 1944)

35. এক পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের $37\frac{1}{2}\%$ বালিকা এবং বাকি বালক। বালকদের 75% এবং বালিকাদের $62\frac{1}{2}\%$ পাস করিল এবং 342 জন বালিকা ফেল করিল। কত জন বালক ফেল করিল? (D. B. 1936)

36. এক পরীক্ষায় ছাত্রদের 90% বানানে, 85% অঙ্কে এবং 150 জন উভয় বিষয়ে রুতকার্য হইল। যদি একাধিক বিষয়ে কেহই অরুতকার্য না হইয়া থাকে, তবে ছাত্রসংখ্যা কত? (D. B. 1933)

কমিশন বা দালালি ও প্রিমিয়ম

3. কোন ব্যক্তি অপর কোন ব্যক্তি দ্বারা নিযুক্ত হইয়া তাহার জন্ত কোন দ্রব্য ক্রয় বা বিক্রয় করিয়া দিলে যে পারিশ্রমিক পায়, তাহাকে কমিশন বা দালালি (Commission or Brokerage) বলে। কমিশন সাধারণতঃ ক্রীত ও বিক্রীত দ্রব্যের মূল্যের উপর শতকরা হিসাবে নির্ণীত হয়। কোনও দ্রব্য বিমা করিবার জন্ত যে অর্থ দেওয়া হয়, তাহাকে প্রিমিয়ম (Premium) বলে।

উদাহরণ 1. এক ব্যক্তি 2496 টাকায় কোন সম্পত্তি বিক্রয় করিয়া দিয়া 156 টাকা কমিশন পাইল। কমিশনের হার শতকরা কত?

2496 টাকার কমিশন = 156 টাকা

$$\therefore 1 \dots \dots = \frac{156}{2496} \text{ টাকা}$$

$$\therefore 100 \dots \dots = \frac{156 \times 100}{2496} \text{ টাকা} = 6\frac{1}{4} \text{ টাকা}$$

$\therefore$ কমিশনের হার শতকরা $6\frac{1}{4}$.

উদাহরণ 2. 1520 টাকা মূল্যের দ্রব্য শতকরা 5 টাকা প্রিমিয়মে বিমা করিতে হইবে। কত টাকার জন্ত বিমা করিলে কোন কারণে দ্রব্যটি নষ্ট হইলেও দ্রব্যের মূল্য এবং প্রদত্ত প্রিমিয়ম উভয়ই পাওয়া যাইবে?

95 টাকা মূল্যের দ্রব্যের জন্ত যদি 95 টাকার বিমা করা যায়, তবে দ্রব্য নষ্ট হইলে কেবল 95 টাকা পাওয়া যাইবে, বিমা করিবার জন্ত প্রিমিয়ম বাবদ যে টাকা দেওয়া হইবে তাহা পাওয়া যাইবে না। কিন্তু 95 টাকা মূল্যের দ্রব্যের জন্ত যদি 100 টাকার বিমা করা হয়, তবে দ্রব্য নষ্ট হইলে 100 টাকা পাওয়া যাইবে এবং তাহাতে দ্রব্যের মূল্য 95 টাকা এবং 100 টাকার বিমা করিবার প্রিমিয়ম 5 টাকা উভয়ই পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ 95 টাকা মূল্যের দ্রব্যের জন্ত 100 টাকার বিমা করিতে হইবে

$$1 \dots \dots \dots \frac{100}{95} \dots \dots \dots$$

$$\therefore 1520 \dots \dots \dots \frac{100 \times 1520}{95} \text{ টাকার বা } 1600 \text{ টাকার বিমা}$$

করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 2

1. এক দালাল 4370 টাকা মূল্যে কোন দ্রব্য ক্রয় করিয়া দিয়া শতকরা 5 টাকা হারে দালালি পাইল। সে কত দালালি পাইল?

2. শতকরা $\frac{1}{8}$ টাকা হারে 43200 টাকার দালালি কত?

3. এক দালাল 83296 টাকা মূল্যে একটি দ্রব্য ক্রয় করিয়া দিয়া ক্রেতা ও বিক্রেতা উভয়ের নিকট হইতে শতকরা $\frac{1}{8}$ টাকা হারে দালালি পাইল। সে মোট কত দালালি পাইল?

4. এক দালাল কোন সম্পত্তি বিক্রয় করিয়া দিয়া ক্রেতা ও বিক্রেতা উভয়ের নিকট হইতে শতকরা $\frac{1}{4}$ টাকা হারে দালালি পাইল। সে যদি মোট 380 টাকা 50 পরস দালালি পাইয়া থাকে, তবে ঐ সম্পত্তির মূল্য কত ?

5. এক ব্যক্তি 75200 টাকা মূল্যের জিনিস বিক্রয় করিয়া দিয়া 94 টাকা দালালি পাইল। দালালির হার শতকরা কত ?

6. 3600 টাকা মূল্যের দ্রব্য শতকরা 4 টাকা হারে বিমা করিতে হইবে। কত টাকার জ্ঞান বিমা করিলে দ্রব্যটি কোন কারণে নষ্ট হইলেও দ্রব্যটির মূল্য ও প্রদত্ত প্রিমিয়ম উভয়ই পাওয়া যাইবে ?

অনুপাত ও সমানুপাত

4. সমজাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে প্রথমটি দ্বিতীয়টির কত অংশ বা কত গুণ, তাহা যদ্বারা প্রকাশিত হয়, তাহাকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত (Ratio) বলে। কাজেই দুইটি সমজাতীয় রাশির প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ করিয়া অনুপাত নির্ণয় করা হয়। যেমন,

3 মিটার ও 4 মিটারের অনুপাত = $3 \text{ মিটার} \div 4 \text{ মিটার} = \frac{3}{4}$ এবং

4 মিটার ও 3 মিটারের অনুপাত = $4 \text{ মিটার} \div 3 \text{ মিটার} = \frac{4}{3}$ ।

5. দুইটি রাশি সমজাতীয় না হইলে উহাদের অনুপাত নির্ণয় করা চলে না। যেমন, 2 টাকা ও 3 মিটারের অনুপাত নির্ণয় করা চলে না।

দুইটি সমজাতীয় রাশির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদিগকে একই এককে পরিণত করিয়া লইতে হয়। যেমন, 80 পরস ও 3 টাকার অনুপাত = $80 \text{ পরস} \div 300 \text{ পরস} = \frac{8}{3}$ ।

সমজাতীয় দুইটি রাশির ভাগফল শুদ্ধ সংখ্যা বলিয়া উহাদের অনুপাতও শুদ্ধ সংখ্যা।

‘3 মিটার ও 4 মিটারের অনুপাত’কে 3 মিটার : 4 মিটার বা 3 : 4 বা $\frac{3}{4}$ লেখা যায়।

6. কোন অনুপাতের রাশি দুইটির প্রথমটিকে পূর্বরাশি (Antecedent) এবং দ্বিতীয়টিকে উত্তররাশি (Consequent) বলে।

যদি দুইটি অনুপাতের একটির পূর্বরাশি ও উত্তররাশি যথাক্রমে অপরটির উত্তররাশি ও পূর্বরাশি হয়, তবে অনুপাত দুইটির প্রত্যেকটিকে অপরটির ব্যস্ত বা বিপরীত অনুপাত (Inverse or reciprocal ratio) বলে। যেমন, 3 : 4 ও 4 : 3 এর প্রত্যেকটি অপরটির ব্যস্ত অনুপাত।

অনুপাত দুই প্রকার—সরল ও মিশ্র। ‘2 : 3’ ইহা একটি সরল অনুপাত (Simple ratio)। দুই বা ততোধিক অনুপাতের পূর্বরাশিসমূহের গুণফলকে পূর্বরাশি এবং উত্তররাশিসমূহের গুণফলকে উত্তররাশি ধরিলে যে অনুপাত হয়, তাহাকে ঐ অনুপাতগুলির মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত (Compound ratio) বলে। যেমন, 1 : 2, 3 : 4 ও 5 : 11 এর মিশ্র অনুপাত $1 \times 3 \times 5 : 2 \times 4 \times 11 = 15 : 88$ ।

কোন সামান্য ভগ্নাংশের লব ও হরকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না বলিয়া, কোন অনুপাতের রাশি দুইটিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অনুপাতটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। অনুপাতের রাশি দুইটিকে পূর্ণসংখ্যায় এবং অনুপাতটিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করিতে হয়। যেমন, $\frac{2}{3} : \frac{4}{6} = 10 : 12$ (3 ও 5 এর ল. সা. গু. 15 দ্বারা গুণ করিয়া) $= 5 : 6$ (সাধারণ গুণনীয়ক 2 দ্বারা ভাগ করিয়া)।

উদাহরণ। $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ এবং $\frac{1}{3} : \frac{2}{4}$ এর ভিতর কোন্টি ক্ষুদ্রতর?

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \text{ এবং } \frac{1}{3} : \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{2}{3}$$

এখন, $\frac{3}{4}$ এবং $\frac{2}{3}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিলে,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \text{ এবং } \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}; \therefore \text{স্পষ্টতঃই } \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \text{ ক্ষুদ্রতর।}$$

7. সমানুপাত। দুইটি অনুপাত যদি পরস্পর সমান হয়, তবে উহারা একটি **সমানুপাত** (Proportion) উৎপন্ন করে। যেমন, '2 গ্রাম : 3 গ্রাম = 4 লিটার : 6 লিটার' একটি সমানুপাত, কারণ অনুপাত দুইটির প্রত্যেকটি $\frac{2}{3}$ এর সমান। সমানুপাতের রাশি চারটি সমজাতীয় নাও হইতে পারে কিন্তু প্রথম ও দ্বিতীয় রাশি এবং তৃতীয় ও চতুর্থ রাশি সমজাতীয় হইবেই।

যদি চারটি রাশির প্রথমটি : দ্বিতীয়টি = তৃতীয়টি : চতুর্থটি হয়, তবে রাশি চারটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে। যেমন, 2, 3, 4 ও 6 সমানুপাতী। উহাদিগকে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় :

(1) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, (2) $2 : 3 = 4 : 6$, (3) $2 : 3 :: 4 : 6$. ইহাকে '2 অনুপাত 3 সমান 4 অনুপাত 6' বলিয়া পড়া হয়।

8. কোন সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে প্রান্তীয় রাশি (Extremes) এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে মধ্যরাশি (Means) বলে। চতুর্থ রাশিকে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির চতুর্থ সমানুপাতী (Fourth Proportional) বলে।

2, 3, 4 ও 6 এই চারটি সংখ্যা সমানুপাতী ;

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \text{ বা } \frac{2}{3} \times 3 \times 6 = \frac{4}{6} \times 3 \times 6, \text{ বা } 2 \times 6 = 3 \times 4;$$

$\therefore$ চারটি সংখ্যা সমানুপাতী হইলে,

প্রথম রাশি $\times$ চতুর্থ রাশি = দ্বিতীয় রাশি $\times$ তৃতীয় রাশি ;

$\therefore$ একটি প্রান্তীয় রাশি = মধ্যরাশি দুইটির গুণফল $\div$ অপর প্রান্তীয় রাশি এবং একটি মধ্যরাশি = প্রান্তীয় রাশি দুইটির গুণফল $\div$ অপর মধ্যরাশি।

$\therefore$ কোন সমানুপাতের তিনটি রাশি জানা থাকিলে অপর রাশিটি নির্ণয় করা যায়।

9. ক্রমিক সমানুপাত (Continued Proportion)। সমজাতীয় তিনটি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত যদি দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে রাশি তিনটিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলে। যেমন, $1 : 2 = 2 : 4$ এর 1, 2 ও 4 ক্রমিক সমানুপাতী।

দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির মধ্য সমানুপাতী (Mean proportional) এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির তৃতীয় সমানুপাতী (Third proportional) বলে।

∴ তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী রাশির প্রথম : দ্বিতীয় = দ্বিতীয় : তৃতীয় ;

∴ প্রথম × তৃতীয় = দ্বিতীয় × দ্বিতীয় = (দ্বিতীয়)^২ (অনু. ৪)

∴ $\sqrt{\text{প্রথম} \times \text{তৃতীয়}} = \text{দ্বিতীয়}$ ।

তিনের অধিক রাশিও ক্রমিক সমানুপাতী হইতে পারে। যেমন, 1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 এর 1, 2, 4 ও 8 ক্রমিক সমানুপাতী।

যদি ক, খ ও গ এর ক্রমিক অনুপাত 3, 5 ও 8 এর ক্রমিক অনুপাতের সমান হয়, তবে উহাকে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা হয় :

$$\text{ক} : \text{খ} : \text{গ} = 3 : 5 : 8.$$

উদাহরণ 1. 2, 3 ও 4 এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

$$2 : 3 = 4 : \text{নির্ণেয় সংখ্যা}$$

$$\therefore 2 \times \text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 3 \times 4 ; \therefore \text{নির্ণেয় সংখ্যা} = \frac{3 \times 4}{2} = 6.$$

উদাহরণ 2. 4 ও 25 এর মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর।

$$4 : \text{নির্ণেয় সংখ্যা} = \text{নির্ণেয় সংখ্যা} : 25$$

$$\therefore (\text{নির্ণেয় সংখ্যা})^2 = 4 \times 25 = 100 ; \therefore \text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 10.$$

উদাহরণ 3. দুইটি রাশির অনুপাত 5 : 7 ; 'প্রথম রাশিটি 15 গ্রাম হইলে দ্বিতীয় রাশিটি কত ?

$$15 \text{ গ্রাম} : \text{দ্বিতীয় রাশি} = 5 : 7$$

$$\therefore \text{দ্বিতীয় রাশি} \times 5 = 15 \text{ গ্রাম} \times 7$$

$$\therefore \text{দ্বিতীয় রাশি} = (15 \text{ গ্রাম} \times 7) \div 5 = 21 \text{ গ্রাম}।$$

প্রশ্নমালা 3

অনুপাতগুলির মান লিখিষ্ট আকারে প্রকাশ কর :

$$1. 4 : 6 \quad 2. 9 : 12 \quad 3. 20 : 16 \quad 4. \frac{5}{8} : 1\frac{1}{2}$$

$$5. 1 \text{ টা. } 80 \text{ প.} : 2 \text{ টা. } 40 \text{ প.} \quad 6. 4 \text{ কি.গ্রা.} : 3 \text{ কি.গ্রা. } 200 \text{ গ্রা.}$$

$$7. 2 : 3, 3 : 4 \text{ ও } 7 : 9 \text{ এর ভিতর কোনটি ক্ষুদ্রতম ?}$$

$$8. \frac{1}{2} : \frac{1}{3}, \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \text{ ও } \frac{1}{4} : \frac{1}{5} \text{ এর ভিতর কোনটি বৃহত্তম ?}$$

$$9. 3 : 4, 5 : 6 \text{ এবং } 9 : 10 \text{ এর মিশ্র অনুপাত কত ?}$$

$$10. \text{ক } 3 \text{ সেকেন্ডে } 3\frac{1}{2} \text{ মিটার এবং খ } 5 \text{ সেকেন্ডে } 8\frac{3}{4} \text{ মিটার যাইতে পারে।}$$

তাহাদের গতিবেগের অনুপাত কত ?

11. 2 জন পুরুষ 4 দিনে যে কাজ করিতে পারে, 3 জন বালক 5 দিনে সেই কাজ করিতে পারে। 1 জন পুরুষ ও 1 জন বালকের কাজের অনুপাত কত ?

চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :

$$12. 1, 2, 3$$

$$13. 6, 9, 10$$

$$14. 4, 10, 6$$

15. 12, 8, 15 টা. 16. 27 মি., 18 মি., 6 কি.গ্রা. 17. $2\frac{1}{2}$ মি., $3\frac{3}{4}$ মি., $4\frac{1}{2}$ মি.
মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর :

18. 4, 16 19. 8, 18 20. 24, 54
21. $\frac{7}{8}$, 56 22. $6\frac{3}{4}$, $21\frac{1}{3}$ 23. 7.5 কি.গ্রা., 2.7 কি.গ্রা.

তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :

24. 12, 18 25. $\frac{5}{4} : 1$ 26. 3.2 গ্রাম, 2.4 গ্রাম
27. 3 টাকা ও 2 টাকা 25 পয়সার যে অনুপাত, 4 মিটার ও কোন্ রাশির

সেই অনুপাত ?

28. $\frac{3}{4}$ ও কোন্ রাশির যে অনুপাত, সেই রাশি ও $\frac{4}{3}$ এর সেই অনুপাত।
রাশিটি কত ?

29. দুইটি রাশির অনুপাত $\frac{3}{5}$; পূর্বরাশিটি 1 টাকা 35 পয়সা হইলে, উত্তররাশিটি
কত ?

30. দুইটি রাশির অনুপাত $\frac{5}{7}$; উত্তররাশিটি 1 কিমি. 225 মি. হইলে পূর্বরাশিটি
কত ?

10. অনুপাত ও সমানুপাত বিষয়ক বিবিধ প্রশ্ন।

উদাহরণ 1. চারিটি সংখ্যা ক্রমিক সমানুপাতী। প্রথম সংখ্যাটি 1 এবং দ্বিতীয়
সংখ্যাটি 2 হইলে, চতুর্থ সংখ্যাটি কত ?

$\therefore$ সংখ্যা চারিটি ক্রমিক সমানুপাতী,

$\therefore$ প্রথম : দ্বিতীয় = দ্বিতীয় : তৃতীয় = তৃতীয় : চতুর্থ।

আবার, প্রথম : দ্বিতীয় = $1 : 2$ বা $\frac{1}{2}$; $\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত = $\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\text{প্রথম}}{\text{চতুর্থ}} = \frac{\text{প্রথম}}{\text{দ্বিতীয়}} \times \frac{\text{দ্বিতীয়}}{\text{তৃতীয়}} \times \frac{\text{তৃতীয়}}{\text{চতুর্থ}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \text{চতুর্থ সংখ্যা} \times 1 = \text{প্রথম সংখ্যা} \times 8 \therefore \text{চতুর্থ সংখ্যা} = 8.$$

উদাহরণ 2. ক, খ, গ ও ঘ চারিটি রাশি এবং ক : খ = $1 : 2$, খ : গ =
3 : 4 এবং গ : ঘ = $5 : 6$. ক : ঘ = কত ? ঘ 8 লিটার হইলে ক = কত ?

$$\frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{1}{2}, \frac{\text{খ}}{\text{গ}} = \frac{3}{4} \text{ এবং } \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \frac{\text{ক}}{\text{খ}} \times \frac{\text{খ}}{\text{গ}} \times \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \therefore \frac{\text{ক}}{\text{ঘ}} = \frac{5}{16} \therefore \text{ক : ঘ} = 5 : 16$$

$$\text{আবার, } \therefore \frac{\text{ক}}{8 \text{ লিটার}} = \frac{5}{16} ; \therefore \text{ক} = \frac{5}{16} \times 8 \text{ লিটার} = 2\frac{1}{2} \text{ লিটার।}$$

উদাহরণ 3. ক : খ = $2 : 3$, খ : গ = $4 : 5$ এবং গ : ঘ = $9 : 8$. ক, খ,
গ ও ঘ এর ক্রমিক অনুপাত কত ? ক 12 মিটার হইলে ঘ কত মিটার ?

$$\text{ক : খ} = 2 : 3$$

$$\text{খ : গ} = 4 : 5 = 1 : \frac{5}{4} = 3 : \frac{5 \times 3}{4} = 3 : \frac{15}{4}$$

$$গ : ঘ = 9 : 8 = 1 : \frac{8}{9} = \frac{15}{4} : \frac{8 \times 15}{9 \times 4} = \frac{15}{4} : \frac{10}{3}$$

$$\therefore ক : খ : গ : ঘ = 2 : 3 : \frac{15}{4} : \frac{10}{3} = 24 : 36 : 45 : 40.$$

আবার $\therefore ক : ঘ = 24 : 40 = 1 : \frac{5}{3}$, $\therefore ক$ 12 মিটার হইলে, $ঘ = \frac{5}{3} \times 12$ মিটার = 20 মিটার।

উদাহরণ 4. ক এর ওজন খ এর ওজনের $\frac{2}{3}$ এবং খ এর ওজন গ এর ওজনের $1\frac{1}{2}$ গুণ। গ এর ওজন 30 কিলোগ্রাম হইলে, ক এর ওজন কত?

$$ক এর ওজন = খ এর ওজনের \frac{2}{3}, \therefore \frac{ক এর ওজন}{খ এর ওজন} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore খ এর ওজন = গ এর ওজনের 1\frac{1}{2} গুণ, \therefore \frac{খ এর ওজন}{গ এর ওজন} = 1\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{ক এর ওজন}{খ এর ওজন} \times \frac{খ এর ওজন}{গ এর ওজন} = \frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2} = \frac{4}{3}, \text{ বা } \frac{ক এর ওজন}{গ এর ওজন} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore ক এর ওজন = \frac{4}{3} \times গ এর ওজন = \frac{4}{3} \times 30 \text{ কিলোগ্রাম} = 24 \text{ কিলোগ্রাম।}$$

উদাহরণ 5. যত্ন ও মধুর বর্তমান বয়সের অনুপাত 4 : 5. 9 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত 5 : 7 ছিল। যত্নর বর্তমান বয়স কত?

যত্নর বর্তমান বয়স $4x$ বৎসর হইলে, মধুর বর্তমান বয়স $5x$ বৎসর।

$$\therefore \text{সর্তানুসারে, } \frac{4x-9}{5x-9} = \frac{5}{7},$$

$$\text{বা } 28x-63=25x-45, \text{ বা } 3x=18 \therefore x=6$$

$$\therefore \text{যত্নর বর্তমান বয়স} = 4x \text{ বৎসর} = 24 \text{ বৎসর।}$$

উদাহরণ 6. রামের টাকার $\frac{2}{3}$ এবং শ্রামের টাকার $\frac{3}{4}$ পরস্পর সমান। রাম শ্রামকে 8 টাকা দিলে তাহাদের টাকার অনুপাত 7 : 10 হইবে। শ্রামের কত টাকা আছে?

$$\text{রামের টাকার } \frac{2}{3} = \text{শ্রামের টাকার } \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{\text{রামের টাকা}}{\text{শ্রামের টাকা}} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

$$\therefore \text{রামের } 9x \text{ টাকা থাকিলে, শ্রামের } 8x \text{ টাকা আছে।}$$

$$\therefore \text{সর্তানুসারে, } \frac{9x-8}{8x+8} = \frac{7}{10},$$

$$\text{বা } 90x-80=56x+56, \text{ বা } 34x=136 \therefore x=4$$

$$\therefore \text{শ্রামের } 8x \text{ টাকা বা } 32 \text{ টাকা আছে।}$$

উদাহরণ 7. 32 লিটার জলমিশ্রিত দুধে জল ও দুধের অনুপাত 3 : 5. উহাতে কত দুধ মিশাইলে জল ও দুধের অনুপাত 2 : 9 হইবে?

32 লিটার জলমিশ্রিত দুধে জল 3 ভাগ থাকিলে দুধ আছে 5 ভাগ। সুতরাং 32 লিটার জলমিশ্রিত দুধে জল আছে 32 লিটার $\times \frac{3}{8} = 12$ লিটার এবং দুধ

আছে (32-12) লিটার বা 20 লিটার। মনে কর, যেন উহাতে x লিটার দুধ মিশাইতে হইবে।

$$\therefore \text{সর্তানুসারে, } \frac{12}{20+x} = \frac{2}{3},$$

$$\text{বা } 40+2x=108 \quad \therefore x=34$$

$\therefore$ 34 লিটার দুধ মিশাইতে হইবে।

উদাহরণ 8. এক কুকুর এক খরগোসকে দেখিয়া পিছনে ছুটিল। কুকুর যে সময়ে 3 লাফ দেয় খরগোস সেই সময়ে 4 লাফ দেয় কিন্তু কুকুর 5 লাফে যতটা যায় খরগোস 7 লাফে ততটা যায়। কুকুর ও খরগোসের গতিবেগের অনুপাত কত?

কুকুর 5 লাফে 1 মিটার গেলে খরগোস 7 লাফে 1 মিটার যায়

$$\therefore \dots 1 \dots \frac{1}{5} \dots \dots \dots 1 \dots \frac{1}{7} \dots \dots$$

$\therefore$ কুকুর যে সময়ে 3 লাফে $\frac{3}{5}$ মিটার $\times 3$ বা $\frac{9}{5}$ মিটার যায়, সেই সময়ে খরগোস 4 লাফে $\frac{4}{7}$ মিটার $\times 4$ বা $\frac{16}{7}$ মিটার যায়।

$\therefore$ কুকুরের গতিবেগ : খরগোসের গতিবেগ

$$= \frac{9}{5} \text{ মিটার} : \frac{16}{7} \text{ মিটার} = \frac{9}{5} : \frac{16}{7} = 21 : 20.$$

উদাহরণ 9. একটি কাজ 2 জন পুরুষ 3 দিনে বা 3 জন স্ত্রীলোক 4 দিনে বা 4 জন বালক 5 দিনে করিতে পারে। 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালকের কাজের ক্রমিক অনুপাত কত?

কাজটি 1 জন পুরুষ 6 দিনে বা 1 জন স্ত্রীলোক 12 দিনে বা 1 জন বালক 20 দিনে করিতে পারে। সুতরাং 1 দিনে 1 জন পুরুষ কাজটির $\frac{1}{6}$ অংশ, 1 জন স্ত্রীলোক $\frac{1}{12}$ অংশ এবং 1 জন বালক $\frac{1}{20}$ অংশ করিতে পারে।

$$\therefore \text{কাজের নির্ণেয় ক্রমিক অনুপাত} = \frac{1}{6} : \frac{1}{12} : \frac{1}{20} = 10 : 5 : 3.$$

উদাহরণ 10. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 4 : 3 : 2. প্রতি বর্গ মিটারে 2 টাকা 50 পয়সা হিসাবে ঘরটির দেওয়ালগুলি রং করিতে 280 টাকা লাগিল। ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত?

ঘরটির দৈর্ঘ্য $4x$ মিটার হইলে, প্রস্থ $3x$ মিটার এবং উচ্চতা $2x$ মিটার।

$$\therefore \text{দেওয়ালগুলির ক্ষেত্রফল} = 2(\text{দৈর্ঘ্য} + \text{প্রস্থ}) \times \text{উচ্চতা}$$

$$= 2(4x + 3x) \times 2x \text{ বর্গ মিটার} = 28x^2 \text{ বর্গ মিটার।}$$

আবার, প্রতি বর্গ মিটারে 2 টাকা 50 পয়সা বা $2\frac{1}{2}$ টাকা হিসাবে দেওয়ালগুলি রং করিতে 280 টাকা লাগিয়াছে;

$$\therefore \text{দেওয়ালগুলির ক্ষেত্রফল} = (280 \text{ টাকা} \div 2\frac{1}{2} \text{ টাকা}) \text{ বর্গ মিটার} = 112 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\therefore 28x^2 = 112, \text{ বা } x^2 = 4 \quad \therefore x = 2$$

$\therefore$ ঘরটির দৈর্ঘ্য $= 4x$ মিটার $= 8$ মিটার, প্রস্থ $= 3x$ মিটার $= 6$ মিটার এবং উচ্চতা $= 2x$ মিটার $= 4$ মিটার।

উদাহরণ 11. একই সময়ে একখানি ট্রেন হাওড়া হইতে গয়া এবং অপর একখানি গয়া হইতে হাওড়া অভিমুখে রওনা হইল। ট্রেন দুইখানির সাক্ষাৎ হওয়ার পর উহারা যথাক্রমে 9 ঘণ্টায় ও 16 ঘণ্টায় গন্তব্য স্থানে পৌছিল। দেখাও যে, ট্রেন দুইখানির গতিবেগের অনুপাত = 4 : 3.

মনে কর, রওনা হওয়ার x ঘণ্টা পরে ট্রেন দুইখানির সাক্ষাৎ হইল। তাহা হইলে,
প্রথম ট্রেনের x ঘণ্টার পথ = দ্বিতীয় ট্রেনের 16 ঘণ্টার পথ ... (1)

$$\therefore \dots \dots 1 \dots \dots = \dots \dots \frac{16}{x} \dots \dots (2)$$

আবার, প্রথম ট্রেনের 9 ঘণ্টার পথ = দ্বিতীয় ট্রেনের x ঘণ্টার পথ

$$\therefore \dots \dots 1 \dots \dots = \dots \dots \frac{x}{9} \dots \dots (3)$$

$$\therefore (2) \text{ ও } (3) \text{ হইতে, } \frac{16}{x} = \frac{x}{9} \therefore x^2 = 144 \therefore x = 12$$

$\therefore$ (1) হইতে, প্রথম ট্রেনের 12 ঘণ্টার পথ = দ্বিতীয় ট্রেনের 16 ঘণ্টার পথ ;

$\therefore$ প্রথম ট্রেন 1 ঘণ্টায় ঐ পথের $\frac{1}{12}$ অংশ গেলে, দ্বিতীয় ট্রেন 1 ঘণ্টায় ঐ পথের $\frac{1}{16}$ অংশ যায়।

$$\therefore \text{ ট্রেন দুইখানির গতিবেগের অনুপাত } = \frac{1}{12} : \frac{1}{16} = 4 : 3.$$

মন্তব্য। এইরূপ দুইখানি ট্রেন যদি সাক্ষাৎ হওয়ার পর যথাক্রমে x ও y ঘণ্টায় গন্তব্য স্থানে পৌছে, তবে তাহাদের গতিবেগের অনুপাত $\sqrt{y} : \sqrt{x}$ হইবে।

প্রশ্নমালা 4

1. পাঁচটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার প্রথমটি 2 এবং দ্বিতীয়টি 3; পঞ্চমটি কত?
2. ক, খ ও গ তিনটি রাশি এবং ক : খ = 2 : 3 এবং খ : গ = 3 : 4.
ক : গ = কত? ক 5 মিটার হইলে গ কত মিটার?
3. ক : খ = 1 : 2, খ : গ = 2 : 3 এবং গ : ঘ = 3 : 4. ক : খ : গ : ঘ = কত? ঘ 10 কুইন্টেল হইলে ক কত কুইন্টেল?
4. ক : খ = 1 : 2, খ : গ = 3 : 4 এবং গ : ঘ = 5 : 6. ক : খ : গ : ঘ = কত? ক 20 টাকা হইলে ঘ কত টাকা?
5. রাম ও শামের বয়সের অনুপাত 3 : 5. রাম অপেক্ষা শামের বয়স 4 বৎসর অধিক হইলে কাহার বয়স কত?
6. রামের ওজন শামের ওজনের $\frac{2}{3}$ এবং শামের ওজন যদুর ওজনের $1\frac{1}{3}$ গুণ। যদুর ওজন 18 কিলোগ্রাম হইলে রামের ওজন কত?
7. ক এর বয়স খ এর বয়সের $1\frac{1}{2}$ গুণ এবং খ এর বয়স গ এর বয়সের $\frac{2}{3}$ অংশ। ক এর বয়স 15 বৎসর হইলে গ এর বয়স কত?
8. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত 7 : 2. 5 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 8 : 3 হইবে। প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত?

9. মটু ও বাটুর বয়সের অল্পপাত 5 : 6. 10 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অল্পপাত 3 : 4 ছিল। প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত ?

10. রাম ও শ্রামের টাকার অল্পপাত 5 : 3. রাম শ্রামকে 12 টাকা দিলে তাহাদের টাকার অল্পপাত 11 : 9 হইবে। কাহার কত টাকা আছে ?

11. কোন স্কুলের ছাত্রসংখ্যার $\frac{2}{3}$ অপর একটি স্কুলের ছাত্রসংখ্যার $\frac{3}{4}$ । প্রথম স্কুলের 40 জন ছাত্র দ্বিতীয় স্কুলে ভর্তি হওয়ায় দুই স্কুলের ছাত্রসংখ্যার অল্পপাত 8 : 9 হইল। স্কুল দুইটির ছাত্রসংখ্যা কত ছিল ?

12. 56 কিলোগ্রাম জলমিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অল্পপাত 5 : 2 ; উহাতে কত কিলোগ্রাম জল মিশাইলে দুধ ও জলের অল্পপাত 4 : 5 হইবে ? (S. F. 1960)

13. কোন পাত্রের জলমিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অল্পপাত 9 : 2. ঐ পাত্রে যদি 20 লিটার জল ঢালিয়া দেওয়া যায়, তবে দুধ ও জলের অল্পপাত দাঁড়ায় 3 : 4. ঐ পাত্রের জলমিশ্রিত দুধে কত দুধ আছে ?

14. একটি কুকুর এক শশকে দেখিয়া তাড়া করিল। কুকুর যে সময়ে 4 লাফ দেয়, শশক সেই সময়ে 5 লাফ দেয় কিন্তু কুকুর 3 লাফে যতটা যায়, শশক 4 লাফে ততটা যায়। কুকুর ও শশকের বেগের তুলনা কর। (C. U. 1933)

15. একটি কাজ 3 জন পুরুষ 5 দিনে বা 4 জন স্ত্রীলোক 6 দিনে বা 5 জন বালক 8 দিনে করিতে পারে। 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালকের কাজের ক্রমিক অল্পপাত কত ?

16. ক 4 দিনে একটি কাজের $\frac{1}{2}$, খ 3 দিনে অবশিষ্টের $\frac{2}{3}$ এবং গ 2 দিনে কাজটির বাকি অংশ করিল। ক, খ ও গ এর কাজের ক্রমিক অল্পপাত কত ?

17. গত লোকগণনার পর কোন জেলার 4টি মহকুমার লোকসংখ্যা যথাক্রমে 10%, 15%, 20% ও 50% বাড়িল। গত লোকগণনাকালে মহকুমাগুলির লোকসংখ্যার অল্পপাত 9 : 8 : 6 : 4 ছিল, ঐ জেলার লোকসংখ্যা মোটের উপর শতকরা কত বাড়িল ? (S. F. 1962)

18. একই মূল্যে ক 15টি গরু ও 130টি ছাগল ক্রয় করিল এবং খ 9টি গরু ও 175টি ছাগল ক্রয় করিল। একটি গরুর ও একটি ছাগলের মূল্যের অল্পপাত কত ? (S. F. 1963)

19. একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটির অল্পপাত 3 : 4 : 5 এবং সীমাকাল 120 মিটার। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

20. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার ক্রমিক অল্পপাত 3 : 2 : 1. প্রতি বর্গ মিটার 25 পয়সা হিসাবে উহার দেওয়ালগুলি চুনকাম করিতে 40 টাকা খরচ হইল। ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত ?

21. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার ক্রমিক অল্পপাত 5 : 3 : 2. প্রতি বর্গ মিটারে 75 পয়সা হিসাবে উহার দেওয়ালগুলি রং করিতে 600 টাকা খরচ হইল।

প্রতি বর্গ মিটারে 5 টাকা হিসাবে ঘরটির মেঝে কার্পেট দ্বারা আবৃত করিতে কত খরচ লাগিবে ?

22. একই সময়ে একখানি ট্রেন কলিকাতা হইতে মধুপুর এবং আর একখানি ট্রেন মধুপুর হইতে কলিকাতা অভিমুখে রওনা হইল। ট্রেন দুইখানির সাক্ষাৎ হওয়ার পর উহারা যথাক্রমে 1 ঘণ্টায় ও 4 ঘণ্টায় গন্তব্য স্থানে পৌঁছিল। দেখাও যে, ট্রেন দুইখানির গতিবেগের অনুপাত 2 : 1. (C. U. 1946)

সমানুপাতিক ভাগ

11. কোন রাশিকে কতকগুলি সংখ্যার ক্রমিক অনুপাতে বিভক্ত করাকে সমানুপাতিক ভাগ (Proportional division) বলে। উদাহরণ দ্বারা প্রণালী দেখান গেল।

উদাহরণ 1. ক, খ ও গ কে 150 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন তাহাদের অংশগুলির ক্রমিক অনুপাত 3 : 5 : 7 হয়।

ক $3x$ টাকা পাইলে খ $5x$ টাকা এবং গ $7x$ টাকা পায়,

∴ প্রতি টাকায় ক $\frac{3}{3+5+7}$ টাকা, খ $\frac{5}{3+5+7}$ টাকা এবং গ $\frac{7}{3+5+7}$ টাকা পায়।

∴ ক এর প্রাপ্য অংশ = 150 টাকার $\frac{3}{3+5+7} = 150$ টাকার $\frac{3}{15} = 30$ টাকা,

খ এর " " = 150 টাকার $\frac{5}{15} = 50$ টাকা,

এবং গ এর " " = 150 টাকার $\frac{7}{15} = 70$ টাকা।

উদাহরণ 2. ক, খ ও গ কে কতকগুলি লিচু 2, 3 ও 4 এর অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়ায় গ 80টি লিচু পাইল। লিচুর মোট সংখ্যা কত ?

$2+3+4=9$; সুতরাং সমুদয় লিচুর সমান 9 ভাগের 4 ভাগ, অর্থাৎ সমুদয় লিচুর $\frac{4}{9}$ গ পাইল।

∴ লিচুর মোট সংখ্যার $\frac{4}{9} = 80$

∴ লিচুর মোট সংখ্যা = $80 \times \frac{9}{4} = 180$.

অথবা, লিচুর মোট সংখ্যা যেন x . তাহা হইলে, গ এর প্রাপ্য লিচুর সংখ্যা

$$= \frac{4}{2+3+4}x = \frac{4}{9}x.$$

∴ সর্তাভাসারে, $\frac{4}{9}x = 80$; ∴ $x = 180$ ∴ লিচুর মোট সংখ্যা = 180.

উদাহরণ 3. আম, জাম ও লিচুতে 350টি ফল আছে। আম ও জামের সংখ্যার অনুপাত = 2 : 3 এবং জাম ও লিচুর সংখ্যার অনুপাত = 4 : 5. জামের সংখ্যা কত ?

আমের সংখ্যা : জামের সংখ্যা = 2 : 3 = 8 : 12 (4 দ্বারা গুণ করিয়া)

জামের সংখ্যা : লিচুর সংখ্যা = 4 : 5 = 12 : 15 (3 দ্বারা গুণ করিয়া)

∴ আমের সংখ্যা : জামের সংখ্যা : লিচুর সংখ্যা = 8 : 12 : 15

∴ জামের সংখ্যা = 350 এর $\frac{12}{8+12+15} = 350 \times \frac{12}{35} = 120$.

উদাহরণ 4. 196 টাকা ক, খ ও গ কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক এর অংশের $\frac{3}{8}$ = খ এর অংশের $\frac{5}{4}$ = গ এর অংশের $\frac{7}{6}$ হয়।

∴ ক এর অংশের $\frac{3}{8}$ = খ এর অংশের $\frac{5}{4}$ = গ এর অংশের $\frac{7}{6}$:

অর্থাৎ, ক এর অংশ $\times \frac{3}{8}$ = খ এর অংশ $\times \frac{5}{4}$ = গ এর অংশ $\times \frac{7}{6}$

$$\therefore \frac{\text{ক এর অংশ}}{\frac{3}{8}} = \frac{\text{খ এর অংশ}}{\frac{5}{4}} = \frac{\text{গ এর অংশ}}{\frac{7}{6}}$$

এখন, এই ভগ্নাংশ তিনটি পরস্পর সমান বলিয়া উহাদের লবগুলির ক্রমিক অনুপাত, হরগুলির ক্রমিক অনুপাতের সমান হইবে।

$$\therefore \text{ক এর অংশ} : \text{খ এর অংশ} : \text{গ এর অংশ} \\ = \frac{3}{8} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7} = 18 : 16 : 15$$

∴ ক এর অংশ = 196 টাকার $\frac{18}{18+16+15} = 72$ টাকা, (উদা. 1 দেখ।)

খ এর অংশ = 196 টাকার $\frac{16}{18+16+15} = 64$ টাকা

এবং গ এর অংশ = 196 টাকার $\frac{15}{18+16+15} = 60$ টাকা।

উদাহরণ 5. এক ব্যক্তি 92 টাকা দ্বারা চাউল ও ডাল ক্রয় করিল। যদি ঐ চাউল ও ডালের পরিমাণের অনুপাত 2 : 3 হয় এবং সমপরিমাণ চাউল ও ডালের মূল্যের অনুপাত 4 : 5 হয়, তবে ঐ ব্যক্তি কত টাকার চাউল ক্রয় করিয়াছিল?

ঐ ব্যক্তি 2 কুইন্টেল চাউল ক্রয় করিয়া থাকিলে 3 কুইন্টেল ডাল ক্রয় করিয়াছে। আবার, ∴ চাউলের কুইন্টেল 4 টাকা হইলে ডালের কুইন্টেল 5 টাকা;

$$\therefore \text{ঐ চাউল ও ডালের মূল্যের অনুপাত} = (2 \times 4) \text{ টাকা} : (3 \times 5) \text{ টাকা} \\ = 8 : 15.$$

∴ ঐ ব্যক্তি 92 টাকার $\frac{8}{8+15}$ (উদা. 1) বা 32 টাকার চাউল ক্রয় করিয়াছিল।

উদাহরণ 6. একটি ধলিয়ায় টাকা, 50-পয়সা ও 25-পয়সায় মোট 90 টাকা মূল্যের মুদ্রা আছে। মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 2 : 3 : 4 হইলে 25-পয়সাগুলির মূল্য ও সংখ্যা কত?

∴ টাকাগুলির সংখ্যা : 50-পয়সাগুলির সংখ্যা : 25-পয়সাগুলির সংখ্যা \\ = 2 : 3 : 4,

$$\therefore \text{টাকাগুলির মূল্য} : 50\text{-পয়সাগুলির মূল্য} : 25\text{-পয়সাগুলির মূল্য} \\ = 2 \times 100 \text{ পয়সা} : 3 \times 50 \text{ পয়সা} : 4 \times 25 \text{ পয়সা} \\ = 200 : 150 : 100 \\ = 4 : 3 : 2$$

∴ 25-পয়সাগুলির মূল্য = 90 টাকার $\frac{2}{4+3+2}$ (উদা. 1) = 20 টাকা এবং 25-পয়সাগুলির সংখ্যা = (20 × 4) = 80.

উদাহরণ 7. একটি বাঞ্চে 50-পয়সা, 25-পয়সা ও 10-পয়সায় মোট 180টি মুদ্রা আছে। মুদ্রাগুলির মূল্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হইলে, 25-পয়সাগুলির সংখ্যা ও মূল্য কত?

মুদ্রাগুলির মূল্যের অনুপাত = $3 : 4 : 5 = 3 \text{ টাকা} : 4 \text{ টাকা} : 5 \text{ টাকা}$
 $= 6.50 \text{ পয়সা} : 16.25 \text{ পয়সা} : 50.10 \text{ পয়সা} ;$

$\therefore$ মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত = $6 : 16 : 50 = 3 : 8 : 25$

$\therefore$ 25-পয়সাগুলির সংখ্যা = $180 \times \frac{8}{3+8+25}$ (উদ্দা. 1) = 40 এবং
 উহাদের মূল্য = $25 \text{ পয়সা} \times 40 = 10 \text{ টাকা}।$

প্রশ্নমালা 5

1. ক ও খ কে 30 টাকা একরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, ক 2 টাকা পাইলে খ 3 টাকা পায়।
2. 60 টাকাকে 1, 2 ও 3 এর অনুপাতে বিভক্ত কর।
3. 80টি লিচুকে $2 : 3 : 5$ এর অনুপাতে বিভক্ত করিলে সর্বাপেক্ষা ছোট ভাগে কয়টি লিচু পড়িবে?
4. ক, খ ও গ কে 120টি মার্বেল $3 : 2 : 7$ এর অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। ক অপেক্ষা গ কয়টি অধিক পাইল?
5. কতকগুলি লিচু ক, খ ও গ কে $4 : 5 : 6$ এর অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়ায় খ 20টি পাইল। কতগুলি লিচু ভাগ করিয়া দেওয়া হইয়াছিল?
6. 2 টাকা 50 পয়সাকে $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}$ ও 2 এর অনুপাতে বিভক্ত কর।
7. ক, খ ও গ কে 140 টাকা একরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, ক 1 টাকা পাইলে খ 50 পয়সা এবং গ 25 পয়সা পায়।
8. কতকগুলি জাম ক, খ ও গ কে $1:8, 2:7$ ও $3:6$ এর অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। খ 36টি পাইলে জামের মোট সংখ্যা কত?
9. ক, খ ও গ এর বয়সের সমষ্টি 75 বৎসর। 5 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত $3 : 4 : 5$ ছিল। ক এর বয়স অপেক্ষা খ এর বয়স কত অধিক?
10. ক, খ ও গ কে 135 টাকা একরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক এর 2 গুণ খ পায় এবং ক ও খ একত্রে যত পায়, গ তাহার $\frac{1}{2}$ পায়।
11. ক, খ ও গ কে 140টি লিচু একরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, ক 2টি পাইলে খ 3টি এবং খ 4টি পাইলে গ 5টি পায়।
12. এক ক্রিকেট খেলায় ক, খ ও গ একত্রে 342 রান্ করিল। ক ও খ এর রানের অনুপাত এবং খ ও গ এর রানের অনুপাত $3 : 2$ । কে কত রান্ করিল?
13. ক ও খ কে 60টি লিচু একরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, ক এর অংশের $\frac{1}{2}$ এবং খ এর অংশের $\frac{2}{3}$ পরস্পর সমান হয়।
14. ক, খ ও গ কে 174টি জাম একরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, ক এর অংশের $\frac{1}{2}$ = খ এর অংশের $\frac{2}{3}$ = গ এর অংশের $\frac{3}{4}$ হয়।
15. ক, খ ও গ কে 870 টাকা একরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, ক এর অংশের '5' = খ এর অংশের '6' = গ এর অংশের '75' হয়।

16. তিনটি ভগ্নাংশের যোগফল $4\frac{1}{6}$ । প্রথম ভগ্নাংশের $\frac{2}{3}$ = দ্বিতীয় ভগ্নাংশের $\frac{3}{4}$ = তৃতীয় ভগ্নাংশের $\frac{5}{6}$ । ভগ্নাংশ তিনটি কত?

17. 266 টাকা ক, খ, গ ও ঘ কে একপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক এর অংশ : খ এর অংশ = 1 : 2, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 3 : 4 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 5 : 6 হয়।

18. 3 জন পুরুষ, 5 জন স্ত্রীলোক ও 8 জন বালককে 3100 টাকা একপে ভাগ করিয়া দাও যেন, 1 জন পুরুষ 6 পয়সা পাইলে 1 জন স্ত্রীলোক 4 পয়সা এবং 1 জন বালক 3 পয়সা পায়।

19. 2 জন পুরুষ, 3 জন স্ত্রীলোক এবং 4 জন বালককে 280টি কমলালেবু একপে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক পুরুষের অংশের $\frac{2}{3}$ = প্রত্যেক স্ত্রীলোকের অংশের $\frac{3}{4}$ = প্রত্যেক বালকের অংশের $\frac{1}{2}$ হয়।

20. কোন স্কুলে হিন্দু, ব্রাহ্ম, খ্রীষ্টান ও বৌদ্ধ ছাত্রসংখ্যার অনুপাত $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} : \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ । স্কুলটির ছাত্রসংখ্যা কমপক্ষে কত?

21. তামা, দস্তা ও সীসা দ্বারা পিত্তল তৈয়ার করা হয়। যদি পিত্তলে তামা ও দস্তার অনুপাত 3 : 4 এবং দস্তা ও সীসার অনুপাত 6 : 7 হয়, তবে 70 কিলোগ্রাম পিত্তলে কত সীসা থাকিবে?

22. 390 টাকার চাউল ও ডাল ক্রয় করিলাম। যদি ঐ চাউল ও ডালের ওজনের অনুপাত 3 : 4 হয় এবং সমপরিমাণ চাউল ও ডালের মূল্যের অনুপাত 5 : 6 হয়, তবে কত টাকার চাউল ক্রয় করিয়াছিলাম? যদি চাউলের সেন্টনের 25 টাকা হয়, তবে চাউল ও ডালে মোট কত সেন্টনের ক্রয় করিয়াছিলাম?

23. একটি বাঞ্চে 50-পয়সা, 25-পয়সা ও 10-পয়সায় মোট 150 টাকা মূল্যের মুদ্রা আছে। মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 : 5 হইলে প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রার মূল্য ও সংখ্যা কত?

24. এক ব্যক্তির নিকট টাকা, 50-পয়সা, 25-পয়সা ও 10-পয়সায় মোট 228টি মুদ্রা আছে। মুদ্রাগুলির মূল্যের অনুপাত 1 : 2 : 3 : 4 হইলে প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা ও মূল্য কত?

সম্মুখ সমুখান

12. দুই বা ততোধিক ব্যক্তি কোন ব্যবসায়ে লিপ্ত থাকিলে ঐ ব্যবসায়ের লাভ বা ক্ষতির পরিমাণ অংশীদারগণের ভিতর ভাগ করিয়া দেওয়ার প্রণালীকে সম্মুখ সমুখান (Partnership) বলে।

সম্মুখ সমুখান দুই প্রকার—সরল ও মিশ্র।

অংশীদারগণের মূলধন সমান সময় ব্যাপিয়া কোন ব্যবসায়ে নিয়োজিত থাকিলে, তাহাদের লাভ ও ক্ষতি নির্ণয় করিবার প্রণালীকে সরল (simple) সম্মুখ সমুখান

বলে। এরূপস্থলে ব্যবসায়ের লাভ বা ক্ষতি অংশীদারগণের মূলধনসমূহের অনুপাতে সমানুপাতিক ভাগহারের নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

অংশীদারগণের মূলধন সমান সময় ব্যাপিয়া কোন ব্যবসায়ে নিয়োজিত না থাকিলে, তাহাদের লাভ ও ক্ষতি নির্ণয় করিবার প্রণালীকে **মিশ্র (compound) সত্ত্বয় সমুখান** বলে। এরূপস্থলে অংশীদারগণের প্রত্যেক মূলধনকে ঐ মূলধন যত সময় ব্যাপিয়া ব্যবসায়ে নিয়োজিত ছিল, তাহার সাংখ্যমান দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলগুলির অনুপাতে অংশীদারগণের লাভ বা ক্ষতি নির্ণয় করা হয়। এস্থলেও সমানুপাতিক ভাগহারের প্রণালী প্রযোজ্য হইবে।

উদাহরণ 1. ক 300 টাকা, খ 425 টাকা এবং গ 475 টাকা লইয়া এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 1 বৎসর পরে তাহাদের 192 টাকা লাভ হইল। লাভের কে কত টাকা পাইবে?

ক, খ ও গ এর মূলধন সমান সময় ব্যাপিয়া ব্যবসায়ে নিয়োজিত ছিল। সুতরাং তাহারা লাভের 192 টাকা তাহাদের মূলধনের অনুপাতে পাইবে। এখন,

$$300 \text{ টাকা} : 425 \text{ টাকা} : 475 \text{ টাকা} = 12 : 17 : 19 ;$$

$$\therefore \text{ক পাইবে } 192 \text{ টাকার } \frac{12}{12+17+19} \text{ বা } 48 \text{ টাকা (উদা. 1, পৃষ্ঠা 16)}$$

$$\text{খ পাইবে } 192 \text{ টাকার } \frac{17}{12+17+19} \text{ বা } 68 \text{ টাকা}$$

$$\text{এবং গ পাইবে } 192 \text{ টাকার } \frac{19}{12+17+19} \text{ বা } 76 \text{ টাকা।}$$

উদাহরণ 2. ক 300 টাকা মূলধন লইয়া এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ইহার 2 মাস পরে খ 270 টাকা মূলধন লইয়া ক এর সহিত যোগ দিল। ইহার 4 মাস পরে গ 350 টাকা মূলধন লইয়া ঐ ব্যবসায়ে অংশীদার হইল। ব্যবসায় আরম্ভ হইবার 1 বৎসর পরে 420 টাকা লাভ হইল। লাভের কে কত টাকা পাইবে?

ঐ ব্যবসায়ে ক এর মূলধন 12 মাস, খ এর মূলধন 10 মাস এবং গ এর মূলধন 6 মাস খাটিয়াছে।

এখন, 300 টাকা 12 মাস খাটা আর 300 টাকা $\times 12$ বা 3600 টাকা 1 মাস খাটা একই কথা। তদ্রূপ, 270 টাকা 10 মাস খাটা আর 2700 টাকা 1 মাস খাটা এবং 350 টাকা 6 মাস খাটা আর 2100 টাকা 1 মাস খাটা একই কথা। সুতরাং ক, খ ও গ লাভের 420 টাকা, 3600 টাকা : 2700 টাকা : 2100 টাকা বা 12 : 9 : 7 এর অনুপাতে পাইবে।

$$\therefore \text{ক পাইবে } 420 \text{ টাকার } \frac{12}{12+9+7} \text{ বা } 180 \text{ টাকা (উদা. 1, পৃ: 16)}$$

$$\text{খ পাইবে } 420 \text{ টাকার } \frac{9}{12+9+7} \text{ বা } 135 \text{ টাকা}$$

$$\text{এবং গ পাইবে } 420 \text{ টাকার } \frac{7}{12+9+7} \text{ বা } 105 \text{ টাকা।}$$

প্রশ্নমালা 6

1. ক, খ ও গ যথাক্রমে 500 টাকা, 300 টাকা ও 1200 টাকা লইয়া একত্রে এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল এবং এক বৎসরে 3200 টাকা লাভ হইল। লাভের কে কত পাইবে?

(G. U. 1949)

2. ক ও খ একত্রে এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ঐ ব্যবসায় ক এর 150 টাকা 3 মাস, খ এর 175 টাকা 4 মাস খাটিল। ব্যবসায় 92 টাকা ক্ষতি হইলে, কাহার অংশে কত ক্ষতি হইল ?

3. ক, খ ও গ একত্রে 1080 টাকা মূলধন লইয়া এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 2 বৎসর পরে ক এর 80 টাকা, খ এর 60 টাকা এবং গ এর 40 টাকা লাভ হইল। কে কত মূলধন দিয়াছিল ?

4. ক, খ ও গ একত্রে এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। লাভের $\frac{1}{3}$ অংশ ক, $\frac{1}{4}$ অংশ খ এবং অবশিষ্টাংশ গ পায়। ক অপেক্ষা খ এর মূলধন 80 টাকা কম হইলে, গ এর মূলধন কত ?

5. ক, খ ও গ একত্রে এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। তাহাদের মূলধনের অনুপাত 3 : 4 : 5. ছয় মাস পরে ক অপেক্ষা গ 150 টাকা অধিক লাভ পাইল। ব্যবসায় মোট কত টাকা লাভ হইয়াছিল ?

6. ক, খ ও গ একত্রে এক ব্যবসায় করিয়া 1000 টাকা লাভ করে। যদি ক ও খ এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং খ ও গ এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5 হয়, তবে লাভের কে কত পাইবে ? (C. U. 1932)

7. ক, খ ও গ একত্রে এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। লাভের $1\frac{1}{2}$ অংশ ক পায় এবং বাকি অংশ খ ও গ সমান অংশে পায়। মূলধনের $\frac{3}{4}$ অংশ লাভ হওয়ায় ক 375 টাকা লভ্যাংশ পাইল। কে কত মূলধন দিয়াছিল ?

8. তিন চাষী ক, খ এবং গ একই মাঠে গরু চরায়। ঐ মাঠে ক এর 10টি গরু 7 মাস, খ এর 12টি গরু 5 মাস এবং গ এর 15টি গরু 3 মাস চরে। মাঠের খাজনা 17 টাকা 50 পয়সা হইলে, খাজনা বাবদ কে কত দিবে ? (S. F. 1958)

9. ক 300 টাকা, খ 200 টাকা এবং গ 150 টাকা লইয়া এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 4 মাস পর ক তাহার মূলধনের $\frac{1}{3}$ তুলিয়া লইল এবং আরও 9 মাস পর দেখা গেল ব্যবসায় 284 টাকা লাভ হইয়াছে। লাভের কে কত পাইবে ?

(S. F. 1959, '63)

10. ক, খ ও গ 10000 টাকা মূল্যে একটি কৃষিক্ষেত্র ক্রয় করিল এবং ঐ মূল্যমধ্যে ক 4000 টাকা দিল। ঐ কৃষিক্ষেত্র বিক্রয় করিয়া তাহাদের যে লাভ হইল, তাহা হইতে খ 275 টাকা এবং গ 175 টাকা লভ্যাংশ পাইল। ক কত টাকা লভ্যাংশ পাইল ? (S. F. 1956)

11. ক, খ ও গ একটি কারবার আরম্ভ করিয়া ক 2 বৎসরের জন্ম 500 টাকা, খ 15 মাসের জন্ম 400 টাকা এবং গ 10 মাসের জন্ম 300 টাকা দিল। ঐ কারবারে তাহাদের 210 টাকা লাভ হইলে, কে কত পাইবে ? (A. U. 1932)

12. ক, খ, গ ও ঘ একটি কারবার আরম্ভ করিল। 1 জানুয়ারী ক 1200 টাকা, 1 এপ্রিল খ 1500 টাকা, 1 জুলাই গ 1800 টাকা ও 1 অক্টোবর ঘ 2100 টাকা মূলধন দিল। বৎসরান্তে 900 টাকা লাভ হইল। ক কত লাভ পাইবে ? (D. B. 1932)

13. ক ও খ যথাক্রমে 3000 ও 4500 টাকা লইয়া একটি ব্যবসায় খুলিল। 8 মাস পরে ক আরও 2500 টাকা দিল। আরও 7 মাস পরে তাহাদের 520 টাকা লাভ হইল। লাভের কে কত টাকা পাইবে? (Pat. U. 1926 ; S. F. 1964)

14. ক ও খ যথাক্রমে 300 টাকা ও 500 টাকা দিয়া একটি ব্যবসায় খুলিল। 6 মাস পরে ক আরও 400 টাকা দিল কিন্তু খ 100 টাকা তুলিয়া লইল। বৎসরান্তে 61 টাকা 75 পয়সা লাভ হইল। লাভের কে কত পাইবে?

15. 1 জানুয়ারী তারিখে ক 1200 টাকা লইয়া এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 3 মাস পরে খ ঐ ব্যবসায়ে যোগ দিল। খ এর মূলধন কত হইলে, বৎসরান্তে উভয়ে সমান লভ্যাংশ পাইবে?

16. ক ও খ একত্রে গোচারণভূমি 1 বৎসরের জন্ম খাজনা করিয়া লইল। ঐ ভূমিতে ক এর 25টি গরু 7 মাস চরিল। খ এর কয়টি গরু বাকি 5 মাস চরিলে, খ কে ক এর ঠিক অংশ খাজনা দিতে হইবে?

17. ক ও খ এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল এবং খ, ক এর দেড়গুণ মূলধন দিল। 8 মাস পরে খ তাহার মূলধনের $\frac{1}{2}$ তুলিয়া লইল এবং আরও 2 মাস পরে ক তাহার মূলধনের $\frac{1}{2}$ তুলিয়া লইল। বৎসরান্তে তাহাদের 530 টাকা লাভ হইল। কে কত লাভ পাইল?

মিশ্রণ (Alligation)

13. (1) দুই দ্রব্যের মিশ্রণ।

উদাহরণ 1. 56 পয়সা কিলোগ্রাম দরের গুড়ের সহিত 96 পয়সা কিলোগ্রাম দরের গুড় কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত গুড়ের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 80 পয়সা পড়িবে?

মনে কর, 56 পয়সা কিলোগ্রাম দরের x কিলোগ্রাম গুড়ের সহিত 96 পয়সা কিলোগ্রাম দরের y কিলোগ্রাম গুড় মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত গুড়ের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 80 পয়সা পড়িবে।

$$\text{তাহা হইলে } \frac{56x + 96y}{x + y} = 80, \text{ বা } 80x + 80y = 56x + 96y,$$

$$\text{বা } 24x = 16y,$$

$$\text{বা } 3x = 2y$$

$$\therefore x : y = 2 : 3.$$

$\therefore$ 56 পয়সা ও 96 পয়সা কিলোগ্রাম দরের গুড় 2 : 3 অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত গুড়ের প্রতি কিলোগ্রামের দর 80 পয়সা পড়িবে।

টীকা। নির্ণীত অনুপাত 2 : 3 হইতে দেখা যায়, 56 পয়সাকে প্রথম দর, 80 পয়সাকে মধ্য (মিশ্রিত গুড়ের) দর এবং 96 পয়সাকে দ্বিতীয় দর ধরিলে, অনুপাত নির্ণয়ের নিয়ম দাঁড়ায় :

নিয়ম। অনুপাত = দ্বিতীয় দর ~ মধ্য দর : মধ্য দর ~ প্রথম দর,
বা = মধ্য দর ~ দ্বিতীয় দর : প্রথম দর ~ মধ্য দর।

উল্লিখিত সমাধানটির প্রচলিত প্রক্রিয়া নিম্নে দেওয়া গেল :

প্রচলিত প্রক্রিয়া : প্রথম দর মধ্য দর দ্বিতীয় দর
56 পয়সা 80 পয়সা 96 পয়সা

∴ নির্ণেয় অনুপাত = 96 পয়সা ~ 80 পয়সা : 80 পয়সা ~ 56 পয়সা
= 16 পয়সা : 24 পয়সা = 2 : 3.

উদাহরণ 2. 60 পয়সা লিটার দরের কত লিটার দুধের সহিত কত লিটার জল মিশ্রিত করিলে 30 লিটার জলমিশ্রিত দুধের প্রতি লিটারের মূল্য 42 পয়সা পড়িবে ?

এস্থলে প্রতি লিটার দুধের দর 60 পয়সা, প্রতি লিটার জলমিশ্রিত দুধের দর 42 পয়সা এবং প্রতি লিটার জলের দর 0 পয়সা ; সুতরাং

প্রথম দর মধ্য দর দ্বিতীয় দর
60 পয়সা 42 পয়সা 0 পয়সা

∴ 30 লিটার জলমিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অনুপাত হইবে (42 ~ 0) পয়সা : (60 ~ 42) পয়সা বা 7 : 3.

∴ 30 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 30 লিটার $\times \frac{3}{7}$ বা 9 লিটার জল থাকিবে।

∴ 21 লিটার দুধের সহিত 9 লিটার জল মিশ্রিত করিলে 30 লিটার জলমিশ্রিত দুধের প্রতি লিটারের মূল্য 42 পয়সা পড়িবে।

উদাহরণ 3. 92 পয়সা কিলোগ্রাম দরের 15 কিলোগ্রাম চিনির সহিত 1 টাকা 12 পয়সা কিলোগ্রাম দরের কত কিলোগ্রাম চিনি মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চিনির প্রতি কিলোগ্রাম 1 টাকা 8 পয়সা দরে বিক্রয় করিলে 8% লাভ হইবে ?

এস্থলে, ক্রয়মূল্য + ক্রয়মূল্যের 8% = ক্রয়মূল্যের $(1 + \frac{8}{100})$ = ক্রয়মূল্যের $\frac{27}{25}$

∴ 1 কিলোগ্রাম মিশ্রিত চিনির ক্রয়মূল্যের $\frac{27}{25} = 1$ টাকা 8 পয়সা

∴ 1 কিলোগ্রাম মিশ্রিত চিনির ক্রয়মূল্য = 108 পয়সা $\times \frac{25}{27} = 100$ পয়সা।

∴ 1 কিলোগ্রাম মিশ্রিত চিনির দর যদি 100 পয়সা পড়ে, তবে 108 পয়সা কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করিলে 8% লাভ হইবে। এখন,

প্রথম দর মধ্য দর দ্বিতীয় দর
92 পয়সা 100 পয়সা 112 পয়সা

∴ মিশ্রিত চিনিতে প্রথম ও দ্বিতীয় দরের চিনির পরিমাণের অনুপাত হইবে :

112 প. ~ 100 প. : 100 প. ~ 92 প. = 12 : 8 = 3 : 2 = 1 : $\frac{2}{3}$

∴ প্রথম দরের 15 কিলোগ্রাম চিনির সহিত দ্বিতীয় দরের 15 কিলোগ্রাম $\times \frac{2}{3}$ বা 10 কিলোগ্রাম চিনি মিশ্রিত করিতে হইবে।

উদাহরণ 4. 60 পয়সা লিটার দরের মদের সহিত জল মিশ্রিত করিয়া, জলমিশ্রিত মদের প্রতি লিটার 54 পয়সা দরে বিক্রয় করায় এক ব্যক্তির 20% লাভ হইল। জলমিশ্রিত মদের প্রতি লিটারে কত জল ছিল ?

এস্থলে, ক্রয়মূল্য + ক্রয়মূল্যের 20% = ক্রয়মূল্যের $(1 + \frac{20}{100})$ = ক্রয়মূল্যের $\frac{6}{5}$

∴ 1 লিটার জলমিশ্রিত মদের ক্রয়মূল্যের $\frac{6}{5} = 54$ পয়সা

∴ 1 লিটার জলমিশ্রিত মদের ক্রয়মূল্য = 54 পয়সা × $\frac{5}{6}$ = 45 পয়সা

∴ 1 লিটার জলমিশ্রিত মদের দর যদি 45 পয়সা পড়ে, তবে 54 পয়সা লিটার দরে বিক্রয় করিলে 20% লাভ হইবে। এখন,

প্রথম দর	মধ্য দর	দ্বিতীয় দর
60 পয়সা	45 পয়সা	0 পয়সা

∴ জলমিশ্রিত মদে মদ ও জলের অনুপাত = $45 \sim 0 : 60 \sim 45$
 $= 45 : 15 = 3 : 1.$

∴ (3+1) লিটার বা 4 লিটার জলমিশ্রিত মদে জলের পরিমাণ 1 লিটার।

∴ জলমিশ্রিত মদের প্রতি লিটারে জল ছিল $\frac{1}{4}$ লিটার।

উদাহরণ 5. 12 ঘন সেক্টিমিটার পরিমিত একটি রৌপ্যমিশ্রিত স্বর্ণের তালের ওজন 156 গ্রাম। 1 ঘন সেক্টিমিটার রৌপ্যের ওজন 10 গ্রাম এবং 1 ঘন সেক্টিমিটার স্বর্ণের ওজন 19 গ্রাম হইলে ঐ তালে কত গ্রাম রৌপ্য আছে?

1 ঘন সেক্টিমিটার রৌপ্যের ওজন 10 গ্রাম, 1 ঘন সেক্টিমিটার রৌপ্যমিশ্রিত স্বর্ণের ওজন 156 গ্রাম ÷ 12 = 13 গ্রাম এবং 1 ঘন সেক্টিমিটার স্বর্ণের ওজন 19 গ্রাম। এখন,

প্রথম ওজন	মধ্য ওজন	দ্বিতীয় ওজন
10 গ্রাম	13 গ্রাম	19 গ্রাম

∴ রৌপ্যমিশ্রিত স্বর্ণে রৌপ্য ও স্বর্ণের ঘন সেক্টিমিটারের সংখ্যার অনুপাত = $(19 \sim 13)$ গ্রাম : $(13 \sim 10)$ গ্রাম = $6 : 3 = 2 : 1.$

∴ 12 ঘন সেক্টিমিটার রৌপ্যমিশ্রিত স্বর্ণের তালে 12 ঘন সেক্টিমিটার × $\frac{2}{3}$ বা 8 ঘন সেক্টিমিটার রৌপ্য আছে।

∴ ঐ তালে 10 গ্রাম × 8 বা 80 গ্রাম রৌপ্য আছে।

(2) দুই এর অধিক দ্রব্যের মিশ্রণ।

উদাহরণ 6. 7 টাকা 48 পয়সা, 7 টাকা 72 পয়সা এবং 8 টাকা 24 পয়সা কুইন্টেল দরের লবণ কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত লবণের প্রতি কুইন্টেলের মূল্য 8 টাকা পড়িবে?

নিম্ন দুই দরের লবণ 1 কুইন্টেল করিয়া লইয়া মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত লবণের প্রতি কুইন্টেলের মূল্য $(7 \text{ টা. } 48 \text{ প.} + 7 \text{ টা. } 72 \text{ প.}) \div 2$ বা 7 টা. 60 প. পড়িবে। এখন, এই 7 টা. 60 প. কুইন্টেল দরের মিশ্রিত লবণ এবং 8 টা. 24 প. কুইন্টেল দরের লবণ মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত লবণের প্রতি কুইন্টেলের মূল্য 8 টাকা পড়িবে, যদি উহাদের অনুপাত = $(8 \text{ টা. } 24 \text{ প.} - 8 \text{ টা.}) : (8 \text{ টা.} - 7 \text{ টা. } 60 \text{ প.}) = 24 \text{ প.} : 40 \text{ প.} = 3 : 5 = 1 : \frac{5}{3} = 2 : 3\frac{1}{3}$ হয়।

∴ 1 কুইন্টেল করিয়া লওয়া প্রথম দুই দরের লবণের সহিত তৃতীয় দরের $3\frac{1}{3}$ কুইন্টেল লবণ মিশ্রিত করিতে হইবে। ∴ নির্ণেয় অনুপাত = $1 : 1 : 3\frac{1}{3} = 3 : 3 : 10.$

মন্তব্য। যে কোন দুই দরের লবণ যে কোন অনুপাতে মিশ্রিত করিয়াও প্রথমটির সমাধান করা চলে। কাজেই এখানে প্রথমটির উত্তর অসংখ্য হইতে পারে।

উদাহরণ 7. 17 টাকা, 19 টাকা, 21 টাকা ও 24 টাকা সেন্টনের দরের চাউল (প্রথম দুই দরের চাউল 1 : 1 অনুপাতে এবং শেষ দুই দরের চাউল 1 : 2 অনুপাতে লইয়া) কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চাউলের প্রতি সেন্টনের মূল্য 20 টাকা পড়িবে?

17 টাকা ও 19 টাকা সেন্টনের দরের চাউল 1 : 1 অনুপাতে 1 সেন্টনের করিয়া লইয়া মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চাউলের প্রতি সেন্টনের মূল্য পড়িবে $\frac{1}{2}(17+19)$ টাকা বা 18 টাকা, এবং 21 টাকা ও 24 টাকা সেন্টনের দরের চাউল 1 : 2 অনুপাতে যথাক্রমে 1 সেন্টনের ও 2 সেন্টনের লইয়া মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চাউলের প্রতি সেন্টনের মূল্য পড়িবে $\frac{1}{3}(21 \times 1 + 24 \times 2)$ টাকা বা 23 টাকা। $\therefore$ 18 টাকা ও 23 টাকা সেন্টনের দরের মিশ্রিত চাউল (23~20) টাকা : (20~18) টাকা বা 3 : 2 অনুপাতে মিশ্রিত করিলে, চারি দরের মিশ্রিত চাউলের প্রতি সেন্টনের মূল্য 20 টাকা পড়িবে। $\therefore$ 1 : 1 এর অনুপাতে মিশ্রিত প্রথম দুই দরের 3 কুইন্টেল চাউলের সহিত 1 : 2 এর অনুপাতে মিশ্রিত শেষ দুই দরের 2 কুইন্টেল চাউল মিশ্রিত করিতে হইবে। $\therefore$ প্রথমোক্ত 3 কুইন্টেলের ভিতর প্রথম দরের $\frac{3}{5}$ কুইন্টেল ও দ্বিতীয় দরের $\frac{2}{5}$ কুইন্টেল চাউল থাকিবে এবং শেষোক্ত 2 কুইন্টেলের ভিতর তৃতীয় দরের 2 কুইন্টেল $\times \frac{1}{2}$ বা $\frac{1}{2}$ কুইন্টেল এবং চতুর্থ দরের 2 কুইন্টেল $\times \frac{1}{2}$ বা $\frac{1}{2}$ কুইন্টেল চাউল থাকিবে।

$$\therefore \text{নির্ণেয় অনুপাত} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 9 : 9 : 4 : 8.$$

উদাহরণ 8. ক যতটি আম ও যতটি লেবু ক্রয় করিল, খ যথাক্রমে ততটি লেবু ও ততটি আম ক্রয় করিল। ইহাতে ক এর 12 টাকা 60 পয়সা ও খ এর 11 টাকা 40 পয়সা লাগিল। যদি প্রতি আমের মূল্য 18 পয়সা এবং প্রতি লেবুর মূল্য 12 পয়সা হয়, তবে ক কতটি আম ক্রয় করিয়াছিল?

স্পষ্টতঃই ক ও খ এর ক্রীত আম ও লেবুগুলিকে একত্র করিলে, সমুদয় আমের সংখ্যা ও সমুদয় লেবুর সংখ্যা পরস্পর সমান হইবে এবং সমুদয় আম ও সমুদয় লেবুর মোট মূল্য (12 টাকা 60 পয়সা + 11 টাকা 40 পয়সা) বা 24 টাকা হইবে। এখন,

$$1 \text{টি আমের মূল্য} + 1 \text{টি লেবুর মূল্য} = (18 + 12) \text{ পয়সা} = 30 \text{ পয়সা};$$

$$\therefore \text{প্রত্যেক প্রকারের ফলের সংখ্যা} = 24 \text{ টাকা} \div 30 \text{ পয়সা} = 80.$$

$$\therefore \text{ক আম ও লেবুতে মোট 80টি ক্রয় করিয়াছিল।}$$

মনে কর, ক x -সংখ্যক আম এবং $(80 - x)$ -সংখ্যক লেবু ক্রয় করিয়াছিল।

$$\therefore 18 \text{ প.} \times x + 12 \text{ প.} \times (80 - x) = 12 \text{ টা. } 60 \text{ প.,}$$

$$\text{বা } 18x + 960 - 12x = 1260 \quad \therefore 6x = 300 \quad \therefore x = 50$$

$$\therefore \text{ক 50টি আম ক্রয় করিয়াছিল।}$$

উদাহরণ 9. তিনটি পাত্রে জলমিশ্রিত মদ সমপরিমাণে আছে। মদ ও জলের অনুপাত প্রথমটিতে 1 : 2, দ্বিতীয়টিতে 2 : 3 এবং তৃতীয়টিতে 4 : 5। পাত্র তিনটির জলমিশ্রিত মদ অপর একটি পাত্রে ঢালিলে মদ ও জলের অনুপাত কত হইবে?

মনে কর, প্রথমোক্ত পাত্র তিনটির প্রত্যেকটিতে 1 লিটার করিয়া জলমিশ্রিত মদ আছে। তাহা হইলে প্রথমটিতে $\frac{1}{3}$ লিটার মদ, দ্বিতীয়টিতে $\frac{2}{3}$ লিটার মদ এবং তৃতীয়টিতে $\frac{4}{3}$ লিটার মদ আছে। সুতরাং পাত্র তিনটির 3 লিটার জলমিশ্রিত মদ অপর একটি পাত্রে ঢালিলে, শেষোক্ত পাত্রের জলমিশ্রিত মদে মদ থাকিবে $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3})$ লিটার বা $\frac{7}{3}$ লিটার এবং জল থাকিবে $(3 - \frac{7}{3})$ লিটার বা $\frac{2}{3}$ লিটার।

∴ মদ ও জলের নির্ণেয় অনুপাত = $\frac{7}{3} : \frac{2}{3} = 7 : 2$.

উদাহরণ 10. তিনটি পাত্রের আয়তনের অনুপাত 4 : 5 : 6 এবং উহারা জলমিশ্রিত দুধে ভর্তি রহিয়াছে। পাত্র তিনটিতে দুধ ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 1 : 1, 3 : 2 এবং 2 : 1. প্রথমটির $\frac{1}{2}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{1}{3}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{1}{4}$ অংশ জলমিশ্রিত দুধ লইয়া মিশ্রিত করিলে, উৎপন্ন মিশ্রিত পদার্থে দুধ ও জলের অনুপাত কত হইবে?

মনে কর, পাত্র তিনটিতে যথাক্রমে 4 লিটার, 5 লিটার ও 6 লিটার জলমিশ্রিত দুধ আছে। তাহা হইলে,

প্রথম পাত্রের 4 লিটারের $\frac{1}{2}$ বা 2 লিটারে দুধ আছে 2 লিটার $\times \frac{1}{2}$ বা 1 লিটার,
 দ্বিতীয় ... 5 ... $\frac{1}{3}$ বা $\frac{5}{3}$... $\frac{5}{3}$ লিটার $\times \frac{1}{3}$ বা 1 লিটার
 এবং তৃতীয় ... 6 ... $\frac{1}{4}$ বা $\frac{3}{2}$... $\frac{3}{2}$ লিটার $\times \frac{1}{4}$ বা 1 লিটার;

∴ গৃহীত $(2 + \frac{5}{3} + \frac{3}{2})$ লিটার বা $5\frac{1}{6}$ লিটার জলমিশ্রিত দুধে দুধ আছে $(1 + 1 + 1)$ লিটার বা 3 লিটার এবং জল আছে $(5\frac{1}{6} - 3)$ লিটার বা $2\frac{1}{6}$ লিটার।

∴ দুধ ও জলের নির্ণেয় অনুপাত = $3 : 2\frac{1}{6} = 18 : 13$.

উদাহরণ 11. একটি পাত্র জলমিশ্রিত সিরাপে পরিপূর্ণ রহিয়াছে এবং উহাতে জল ও খাঁটি সিরাপের অনুপাত 5 : 7. জলমিশ্রিত সিরাপের কত অংশ তুলিয়া লইয়া পাত্রটিকে জল দ্বারা পূর্ণ করিলে, জল ও সিরাপের অনুপাত 1 : 1 হইবে?

জল ও সিরাপে মোট $(5 + 7)$ ভাগ বা 12 ভাগ থাকিলে, জল আছে 5 ভাগ এবং খাঁটি সিরাপ আছে 7 ভাগ। সুতরাং 12 ভাগ জলমিশ্রিত সিরাপ হইতে 1 ভাগ খাঁটি সিরাপ তুলিয়া লইয়া পাত্রটিকে জল দ্বারা পূর্ণ করিলে, জল ও সিরাপের অনুপাত 6 : 6 বা 1 : 1 হইবে। এখন,

7 ভাগ খাঁটি সিরাপ তুলিতে হইলে সমুদয় জলমিশ্রিত সিরাপ তুলিতে হয়; সুতরাং 1 ভাগ খাঁটি সিরাপ তুলিতে হইলে সমুদয় জলমিশ্রিত সিরাপের $\frac{1}{7}$ অংশ তুলিতে হইবে। ∴ নির্ণেয় অংশ $\frac{1}{7}$.

উদাহরণ 12. দুইটি পাত্রে জলমিশ্রিত দুধ আছে। জল ও দুধের অনুপাত প্রথম পাত্রে 1 : 2 এবং দ্বিতীয় পাত্রে 3 : 4. পাত্র দুইটি হইতে জলমিশ্রিত দুধ কি অনুপাতে লইয়া মিশ্রিত করিলে উৎপন্ন জলমিশ্রিত দুধে জল ও দুধের অনুপাত 2 : 3 হইবে?

প্রথম পাত্রের জলমিশ্রিত দুধের $\frac{1}{3}$ অংশ বা $\frac{1}{3}$ অংশ জল, দ্বিতীয় পাত্রের জলমিশ্রিত দুধের $\frac{3}{7}$ অংশ বা $\frac{3}{7}$ অংশ জল এবং উৎপন্ন জলমিশ্রিত দুধের $\frac{2}{5}$ অংশ বা $\frac{2}{5}$ অংশ জল।

∴ প্রথম ও দ্বিতীয় পাত্র হইতে জলমিশ্রিত দুধ $\frac{3}{4} \sim \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \sim \frac{1}{2}$, অর্থাৎ $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ বা 3 : 7 এর অনুপাতে লইয়া মিশ্রিত করিলে উৎপন্ন জলমিশ্রিত দুধের $\frac{2}{3}$ অংশ জল হইবে [টাকা, অনু. 13]। কাজেই বাকি $\frac{1}{3}$ অংশ দুধ হইবে বলিয়া জল ও দুধের অনুপাত $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ বা 2 : 3 হইবে।

অথবা, নির্ণেয় অনুপাত যেন $x : y$. তাহা হইলে, প্রথম পাত্র হইতে x লিটার এবং দ্বিতীয় পাত্র হইতে y লিটার লইয়া মিশ্রিত করিলে নূতন মিশ্রণে জল থাকিবে $(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y)$ লিটার এবং দুধ থাকিবে $(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y)$ লিটার।

$$\therefore \text{সর্তানুসারে, } \frac{\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y}{\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y} = 2 : 3, \text{ বা } \frac{7x + 9y}{14x + 12y} = \frac{2}{3},$$

$$\text{বা } 28x + 24y = 21x + 27y, \text{ বা } 7x = 3y$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় অনুপাত} = x : y = 3 : 7.$$

প্রশ্নমালা 7

1. 64 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চাউলের সহিত 84 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চাউল কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চাউলের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 72 পয়সা পড়িবে ?

2. 4 টাকা 80 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা'র সহিত 3 টাকা 48 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চা'র প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 4 টাকা 32 পয়সা পড়িবে ?

3. 60 পয়সা কিলোগ্রাম দরের দুধের সহিত জল মিশ্রিত করায় প্রতি সেন্টনের দুধের মূল্য 24 টাকা পড়িল। দুধ ও জল কি অনুপাতে মিশ্রিত করা হইয়াছিল ?

4. 76 পয়সা কিলোগ্রাম দরের কত কিলোগ্রাম ডালের সহিত 56 পয়সা কিলোগ্রাম দরের কত কিলোগ্রাম ডাল মিশ্রিত করিলে, 1 কুইন্টেল মিশ্রিত ডালের মূল্য 64 টাকা পড়িবে ?

5. 42 পয়সা লিটার দরের 12 লিটার দুধের সহিত 60 পয়সা লিটার দরের কত লিটার দুধ মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত দুধের প্রতি লিটারের মূল্য 48 পয়সা পড়িবে ?

6. 72 পয়সা লিটার দরের 24 লিটার দুধের সহিত কত লিটার জল মিশ্রিত করিলে জলমিশ্রিত দুধের প্রতি লিটারের মূল্য 54 পয়সা পড়িবে ?

7. পিত্তল অপেক্ষা পারা $1\frac{1}{2}$ গুণ ভারী এবং পারা অপেক্ষা স্বর্ণ $1\frac{1}{2}$ গুণ ভারী। 8 ঘন সেন্টিমিটার স্বর্ণের সহিত কত ঘন সেন্টিমিটার পিত্তল মিশাইলে উৎপন্ন মিশ্র পদার্থ পারার সমান ভারী হইবে ?

8. 12 ঘন সেন্টিমিটার পরিমিত একটি পিত্তলমিশ্রিত স্বর্ণের তালের ওজন 180 গ্রাম। 1 ঘন সেন্টিমিটার পিত্তলের ওজন 7 গ্রাম এবং 1 ঘন সেন্টিমিটার স্বর্ণের ওজন 19 গ্রাম হইলে ঐ তালে কত গ্রাম স্বর্ণ আছে ?

9. 29 টাকা, 30 টাকা 50 পয়সা এবং 33 টাকা সেন্টনের দরের ডাল (প্রথম দুই দরের ডাল 1 : 2 অনুপাতে লইয়া) কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত ডালের প্রতি সেন্টনের মূল্য 31 টাকা 50 পয়সা পড়িবে ?

10. ক যতটি আম ও যতটি লেবু ক্রয় করিল, খ যথাক্রমে ততটি লেবু ও ততটি আম ক্রয় করিল। ইহাতে ক এর 12 টাকা এবং খ এর 13 টাকা খরচ হইল। যদি প্রতি আমের মূল্য 10 পয়সা এবং প্রতি লেবুর মূল্য 15 পয়সা হয়, তবে ক কতটি আম এবং কতটি লেবু ক্রয় করিয়াছিল?

11. 25 গ্রাম রৌপ্যমিশ্রিত স্বর্ণের মূল্য 182 টাকা। উহাতে রৌপ্য ও স্বর্ণ যে অনুপাতে মিশ্রিত রহিয়াছে, যদি তাহার ব্যস্ত অনুপাতে মিশ্রিত থাকিত, তবে উহার মূল্য 123 টাকা হইত। যদি প্রতি গ্রাম রৌপ্যের মূল্য 20 পয়সা হয়, তবে ঐ রৌপ্যমিশ্রিত স্বর্ণে রৌপ্য ও স্বর্ণের অনুপাত এবং প্রতি গ্রাম স্বর্ণের মূল্য কত?

12. তিনটি সমান গ্লাস জলমিশ্রিত দুধে পরিপূর্ণ রহিয়াছে। দুধ ও জলের অনুপাত প্রথমটিতে 3 : 1, দ্বিতীয়টিতে 5 : 3 এবং তৃতীয়টিতে 9 : 7. গ্লাস তিনটির জলমিশ্রিত দুধ অপর একটি পাত্রে ঢালা হইল। দেখাও যে, শেষোক্ত পাত্রটিতে দুধ ও জলের অনুপাত 31 : 17 হইবে। (D. B. 1929)

13. তিনটি পাত্রে জলমিশ্রিত মদ সমপরিমাণে আছে। মদ ও জলের অনুপাত প্রথমটিতে 2 : 3, দ্বিতীয়টিতে 3 : 4 এবং তৃতীয়টিতে 4 : 5. পাত্র তিনটির জলমিশ্রিত মদ অপর একটি পাত্রে ঢালিলে মদ ও জলের অনুপাত কত হইবে? (S. F. 1963)

14. তিনটি বোতলের আয়তনের অনুপাত 5 : 3 : 2 এবং উহারা জলমিশ্রিত দুধে পরিপূর্ণ রহিয়াছে। দুধ ও জলের অনুপাত প্রথমটিতে 3 : 2, দ্বিতীয়টিতে 2 : 1 এবং তৃতীয়টিতে 3 : 1. প্রথমটির $\frac{1}{3}$ অংশ, দ্বিতীয়টির $\frac{1}{2}$ অংশ এবং তৃতীয়টির $\frac{2}{3}$ অংশ জলমিশ্রিত দুধ তুলিয়া লইয়া মিশ্রিত করিলে দুধ ও জলের অনুপাত কত হইবে? (D. B. 1934)

15. একটি পাত্রের জলমিশ্রিত দুধে 3 ভাগ দুধ এবং 1 ভাগ জল আছে। ঐ জলমিশ্রিত দুধের কত অংশ তুলিয়া লইয়া উহার পরিবর্তে জল ঢালিলে অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে? (U. P. 1911)

16. একটি পাত্র জলমিশ্রিত সিরাপে পরিপূর্ণ এবং উহাতে জল 3 ভাগ ও সিরাপ 5 ভাগ। জলমিশ্রিত সিরাপের কত অংশ তুলিয়া লইয়া পাত্রটি জল দ্বারা পরিপূর্ণ করিলে জল ও সিরাপের অনুপাত 1 : 1 হইবে? (M. U. 1924)

17. দুইটি পাত্রে জলমিশ্রিত দুধ রহিয়াছে। জল ও দুধের অনুপাত একটিতে 2 : 7 এবং অপরটিতে 2 : 9. পাত্র দুইটি হইতে মিশ্রিত পদার্থ কি অনুপাতে লইয়া মিশাইলে উৎপন্ন পদার্থে জল ও দুধের অনুপাত 1 : 4 হইবে? (C. U. 1944)

18. এক ব্যক্তি পুরা এক গ্লাস ঔষধ লইয়া উহার $\frac{1}{4}$ অংশ পান করিল। তৎপর গ্লাসটির বাকি অংশ জল দ্বারা পূর্ণ করিয়া $\frac{1}{3}$ অংশ পান করিল এবং পরে আবার গ্লাসটি জল দ্বারা পূর্ণ করিয়া $\frac{1}{2}$ অংশ পান করিল। সে সমুদয় ঔষধের কত অংশ পান করিল এবং কোন্ বারে কত অংশ পান করিল? (Civil Service)

উত্তরমালা

(পাঠীগণিত)

প্রশ্নমালা 1

1. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 2\frac{7}{8}$
2. 45%, 48%, 150%, 275%, 358 $\frac{1}{3}$ %
3. 4000 টাকা
4. 8000
5. 12800 টাকা
6. 100%
7. 25%
8. 375 টাকা
9. 91 $\frac{1}{4}$ %
10. 1% কমিবে
11. 72 নম্বর, 88 নম্বর
12. 400
13. 450টি
14. 400 টাকা
15. 410 টাকা
16. 5120 টাকা
17. 105 টাকা
18. 700
19. 200
20. 63%
21. ক 9180 টাকা, খ 4590 টাকা, গ 1530 টাকা
22. 20%
23. 80 গ্যালন
24. 1% কমিল
25. 36 টাকা, 48 টাকা
26. 15টি, 18টি
27. 83 $\frac{1}{3}$ %
28. 42 $\frac{5}{8}$ %
29. 35%
30. 20%
31. 7500, 12500
32. 20200
33. 40 টাকা, 60 টাকা
34. 44%
35. 380
36. 200

প্রশ্নমালা 2

1. 318 টা. 50 প.
2. 54 টাকা
3. 208 টা. 24 প.
4. 76100 টাকা
5. শতকরা $\frac{1}{3}$
6. 3750 টাকা

প্রশ্নমালা 3

4. $\frac{3}{4}$
5. $\frac{3}{4}$
6. $1\frac{1}{4}$
7. 2 : 3
8. $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$
9. 9 : 16
10. 2 : 3
11. 15 : 8
12. 6
13. 15
14. 15
15. 10 টাকা
16. 4 কি.গ্রা.
17. 7
18. 8
19. 12
20. 36
21. 7
22. 12
23. 4.5 কি.গ্রা.
24. 27
25. $\frac{4}{5}$
26. 1.8 গ্রাম
27. 3 মিটার
28. 1
29. 2 টা. 25 প.
30. 875 মি.

প্রশ্নমালা 4

1. 10 $\frac{1}{2}$
2. 1 : 2 ; 10 মিটার
3. 1 : 2 : 3 : 4 ; 2 $\frac{1}{2}$ কুইন্টেল
4. 15 : 30 : 40 : 48 ; 64 টাকা
5. 6 বৎসর ; 10 বৎসর
6. 16 কি.গ্রা.
7. 25 বৎসর
8. 35 বৎসর ; 10 বৎসর
9. 25 বৎসর ; 30 বৎসর
10. 100 টা. ; 60 টা.
11. 360 ; 320
12. 34 কিলোগ্রাম
13. 18 লিটার
14. 16 : 15
15. 8 : 5 : 3
16. 9 : 8 : 6
17. 19 $\frac{1}{2}$ %
18. 15 : 2
19. 600 বর্গ মিটার
20. 12 মি., 8 মি., 4 মি.
21. 1875 টাকা

প্রশ্নমালা 5

6. 40 প., 60 প., 70 প., 80 প.
7. 80 টা., 40 টা., 20 টা.
8. 108
9. 5 বৎসর
10. 30 টা., 60 টা., 45 টা.
11. 32টি, 48টি, 60টি
12. 162 রান্, 108 রান্, 72 রান্
13. 36টি, 24টি
14. 72টি, 54টি, 48টি
15. 348 টা., 290 টা., 232 টা.
16. $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$
17. 30 টা., 60 টা., 80 টা., 96 টা.
18. প্রত্যেক পুরুষ 300 টা.,
প্রত্যেক স্ত্রীলোক 200 টা., প্রত্যেক বালক 150 টা.
19. প্রত্যেক পুরুষ 36টি, প্রত্যেক স্ত্রীলোক 32টি, প্রত্যেক বালক 28টি
20. 138
21. 28 কি.গ্রা.
22. 150 টাকা ; 14 সেন্টনের
23. 75 টাকা, 50 টাকা, 25 টাকা ; 150, 200, 250
24. 4, 16, 48, 160 ; 4 টাকা, 8 টাকা, 12 টাকা, 16 টাকা

প্রশ্নমালা 6

1. ক 800 টাকা, খ 480 টাকা, গ 1920 টাকা
2. কএর 36 টাকা, খএর 56 টাকা
3. ক 480 টাকা, খ 360 টাকা, গ 240 টাকা
4. 400 টাকা
5. 900 টাকা
6. ক 160 টাকা, খ 240 টাকা, গ 600 টাকা
7. 500 টাকা, 350 টাকা, 350 টাকা
8. 7 টাকা, 6 টাকা, 4 টাকা 50 পয়সা
9. ক 102 টাকা, খ 104 টাকা, গ 78 টাকা
10. 300 টাকা
11. ক 120 টাকা, খ 60 টাকা, গ 30 টাকা
12. 288 টাকা
13. ক 250 টাকা, খ 270 টাকা
14. ক 32 টা. 50 প., খ 29 টা. 25 প.
15. 1600 টাকা
16. 21টি
17. ক 230 টাকা, খ 300 টাকা

প্রশ্নমালা 7

1. 3 : 2
2. 7 : 4
3. 4 : 1
4. 40 কি.গ্রা., 60 কি.গ্রা.
5. 6 লিটার
6. 8 লিটার
7. 12 ঘন সে.মি.
8. 152 গ্রাম
9. 1 : 2 : 3
10. 60টি, 40টি
11. 2 : 3 ; 12 টাকা
13. 401 : 544
14. 2 : 1
15. $\frac{1}{3}$ অংশ
16. $\frac{1}{5}$ অংশ
17. 9 : 11
18. $\frac{3}{4}$ অংশ ; প্রতিবারে $\frac{1}{4}$ অংশ

বীজগণিত

পুনরালোচনা

1. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা গুণন।

প্রথম নিয়ম। রাশিদ্বয়ের একটির চিহ্নসম্মত প্রত্যেক পদকে অপরটির চিহ্নসম্মত প্রত্যেক পদ দ্বারা গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফলগুলির বীজগণিতীয় যোগফল লও।

উদাহরণ 1. $3x^2+2x-4$ কে $2x^2-3x+5$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned} & (3x^2+2x-4)(2x^2-3x+5) \\ &= 6x^4+4x^3-8x^2-9x^3-6x^2+12x+15x^2+10x-20 \\ &= 6x^4+4x^3-9x^3-8x^2-6x^2+15x^2+12x+10x-20 \\ &= 6x^4-5x^3+x^2+22x-20. \end{aligned}$$

দ্বিতীয় নিয়ম। গুণ্য ও গুণকের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের অধঃক্রমে বা উর্ধ্বক্রমে গুণ্য ও গুণকের পদগুলিকে সাজাইয়া গুণ্যের নীচে গুণককে লিখ। গুণকের নীচে একটি রেখা টান। গুণকের প্রত্যেক পদ দ্বারা গুণ্যের প্রত্যেক পদকে গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফলগুলিকে রেখাটির নীচে এমনভাবে সাজাইয়া লিখ, যেন বিভিন্ন সারির একই প্রকারের সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে থাকে। সর্বনিম্ন সারির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের বীজগণিতীয় যোগফল লইলেই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া যাইবে। বাম দিক হইতে আরম্ভ করিয়া গুণ করাই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 2. $a^2+b^2+c^2+ab-ac+bc$ কে $a-b+c$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য ও গুণক উভয়কেই a র ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া গুণ কর।

$$\begin{array}{r} a^2+ab-ac+b^2+c^2+bc \\ a-b+c \\ \hline a^3+a^2b-a^2c+ab^2+ac^2+abc \\ -a^2b \quad -ab^2 \quad +abc-b^3-bc^2-b^2c \\ \hline a^2c \quad -ac^2+abc \quad +bc^2+b^2c+c^3 \\ \hline a^3 \quad \quad \quad +3abc-b^3 \quad \quad \quad +c^3 \end{array}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় গুণফল} = a^3 - b^3 + c^3 + 3abc.$$

উদাহরণ 3. ax^2+bx-c কে $q-px+x^2$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য ও গুণক উভয়কেই x এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া গুণ কর।

$$\begin{array}{r} ax^2+bx-c \\ x^2-px+q \\ \hline ax^4+bx^3 \quad -cx^2 \\ -apx^3 \quad -bpx^2 \quad +cp \\ \hline aqx^2 \quad +bqx \quad -cq \end{array}$$

$$\therefore \text{গুণফল} = ax^4 + (b-ap)x^3 + (aq-bp-c)x^2 + (bq+cp)x - cq.$$

প্রশ্নমালা 1

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা গুণ কর :

1. $x^2+x+1, x-1$. 2. $4a^2-6a+9, 2a+3$.
3. $9a^2+6ab+4b^2, 3a-2b$. 4. $2x^3-3x^2+x-1, 3x-4$.
5. $3x^3+4x^2y-2xy^2+y^3, 4x-3y$.
6. $a+2b-1, 2a-b+3$. 7. a^2-2a+3, a^2+a-3 .
8. $x^2+2xy+y^2, x^2+2xy+2y^2$.
9. $1-a+2a^2-3a^4, 3a-5+2a^2$. (C. U. 1918)
10. $1-x+x^2-x^3, 1+x+x^2+x^3$. (C. U. 1859)
11. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc, a+b+c$.
12. $x^2-ax+b, x+c$. 13. $ax^2+bx-c, px+q$.
14. x^2-bx+c, x^2+bx-c .

2. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ।

নিয়ম। (1) ভাজ্য ও ভাজক উভয়কেই উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে (বা উর্ধ্বক্রমে) মাজাইয়া পাটীগণিতের প্রক্রিয়া অনুযায়ী এক সারিতে লিখ।

(2) ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলকে নির্ণয় ভাগফলের প্রথম পদরূপে লিখ।

(3) ভাজককে ভাগফলের এই পদ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলকে ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর এবং বিয়োগফলকে সাধারণ অক্ষরটির ঘাতের অধঃক্রমে মাজাও।

(4) প্রাপ্ত বিয়োগফলকে একটি নূতন ভাজ্য মনে করিয়া পূর্বোক্ত প্রক্রিয়া প্রয়োগ কর এবং উল্লিখিতরূপে কার্য করিতে থাক।

উদাহরণ 1. x^4-6x^2+8x-3 কে x^2-2x+1 দ্বারা ভাগ কর।

এখানে ভাজ্যে x^3 ঘটিত কোন পদ নাই। সুবিধার জন্য $0.x^3$ পদটি লওয়া গেল। ইহাতে ভাগফলের কোন পরিবর্তন ঘটবে না, কারণ $0.x^3$ এর মান 0. এইরূপ করায় সদৃশ পদগুলি নীচে নীচে বসিবে। $0.x^3$ না বসাইয়া কিছুটা স্থান ফাঁকা রাখিলেও চলে।

$$\begin{array}{r}
 x^2-2x+1 \overline{) x^4+0.x^3-6x^2+8x-3} \\
 \underline{x^4-2x^3+x^2} \\
 2x^3-7x^2+8x-3 \\
 \underline{2x^3-4x^2+2x} \\
 -3x^2+6x-3 \\
 \underline{-3x^2+6x-3} \\
 0
 \end{array}$$

উদাহরণ 2. $2-x-4x^2+17x^3-12x^4$ কে $3x^2-2x+1$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজকে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সাজাইয়া ভাগ করা গেল।

$$\begin{array}{r}
 1-2x+3x^2 \) \ 2-x-4x^2+17x^3-12x^4 \ (\ 2+3x-4x^2 \\
 \underline{2-4x+6x^2} \\
 3x-10x^2+17x^3 \\
 \underline{3x-6x^2+9x^3} \\
 -4x^2+8x^3-12x^4 \\
 \underline{-4x^2+8x^3-12x^4} \\
 0
 \end{array}$$

মন্তব্য। প্রত্যেকবার বিয়োগ করিবার পর ভাজ্য হইতে আবশ্যকমত পদ নামাইলেই চলে, সমুদয় পদকে নামাইবার প্রয়োজন হয় না।

উদাহরণ 3. $a^3+b^3-c^3+3abc$ কে $a+b-c$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজকে a র ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ কর।

$$\begin{array}{r}
 a+b-c \) \ a^3+3abc+b^3-c^3 \ (\ a^2-ab+ac+b^2+bc+c^2 \\
 \underline{a^3+a^2b-a^2c} \\
 -a^2b+a^2c+3abc \\
 \underline{-a^2b} \quad -ab^2+abc \\
 a^2c+ab^2+2abc \\
 \underline{a^2c} \quad +abc-ac^2 \\
 ab^2+abc+ac^2+b^3 \\
 \underline{ab^2} \quad +b^3-b^2c \\
 abc+ac^2+b^2c \\
 \underline{abc} \quad +b^2c-bc^2 \\
 ac^2+bc^2-c^3 \\
 \underline{ac^2} \quad +bc^2-c^3 \\
 0
 \end{array}$$

প্রশ্নমালা 2

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর :

- $10x^2-19xy+6y^2, 5x-2y.$
- $16x^2-9y^2, 4x+3y.$
- $6+x^2-19x+6x^3, 2+x. \quad (C. U. 1916)$
- $2x^3-x^2-x-3, 2x-3. \quad (C. U. 1923)$
- $6x^3+x^2-44x+21, 3x-7. \quad (C. U. 1922)$
- $8x^3-27, 2x-3.$
- $a^4-16, a+2.$
- $16x^4-1, 2x-1.$
- $32a^5+1, 2a+1.$
- $2x^3-5x^2+8x-3, x^2-2x+3.$
- $a^3+b^3, a^2-ab+b^2.$
- $27x^3-8, 9x^2+6x+4.$
- $1+x-8x^2+19x^3-15x^4, 1+3x-5x^2. \quad (C. U. 1919)$
- $x^4-8x^2+9x-2, x^2+3x-1.$
- $x^4+4x^2+16, x^2+2x+4.$
- $a^4+a^2b^2+b^4, a^2-ab+b^2.$
- $x^4+4, x^2+2x+2.$

18. $a^4 + 4b^4, a^2 - 2ab + 2b^2$. 19. $a^6 - b^6, a^2 + ab + b^2$.
 20. $x^6 - 6x + 5, x^2 - 2x + 1$. (C. U. 1914)
 21. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc, a + b - c$. (C. U. 1933)
 22. $x^3 - y^3 + 3xy + 1, x - y + 1$.

3. গুণ ও ভাগে বন্ধনীর ব্যবহার। বন্ধনী স্থাপন করিয়া গুণ্য ও গুণককে অথবা ভাজ্য ও ভাজককে উহাদের অন্তর্গত ঘাতসমূহের অধঃক্রমে বা উর্ধ্বক্রমে সাজাইয়া অতি সহজে গুণ ও ভাগের কার্য করা যায়।

উদাহরণ 1. $x^2 - ax - bx + ab$ কে $x - c$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{r} \text{গুণ্য} = x^2 - (a+b)x + ab \\ x - c \\ \hline x^3 - (a+b)x^2 + abx \\ - \quad cx^2 + (a+b)cx - abc \\ \hline x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc \end{array}$$

উদাহরণ 2. $x^3 + (a-b-c)x^2 - (ab+ac-bc)x + abc$ কে $x^2 + ax - bx - ab$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{r} \text{ভাজক} = x^2 + (a-b)x - ab \\ x^2 + (a-b)x - ab \overline{) x^3 + (a-b-c)x^2 - (ab+ac-bc)x + abc} \quad x - c \\ \underline{x^3 + (a-b)x^2 - abx} \\ - cx^2 - (ac-bc)x + abc \\ - cx^2 - (ac-bc)x + abc \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ ভাগফল $= x - c$.

উদাহরণ 3. $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$ কে $a - b + c$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য ও ভাজককে a র ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া লও।

$$\begin{array}{r} a - (b-c) \overline{) a^3 + 3abc - b^3 + c^3} \quad (a^2 + a(b-c) + (b^2 + bc + c^2)) \\ \underline{a^3 - a^2(b-c)} \\ a^2(b-c) + 3abc \\ \underline{a^2(b-c) - a(b^2 - 2bc + c^2)} \\ a(b^2 + bc + c^2) - b^3 + c^3 \\ \underline{a(b^2 + bc + c^2) - b^3 + c^3} \end{array}$$

$\therefore$ ভাগফল $= a^2 + a(b-c) + b^2 + bc + c^2$,

বা $= a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc$.

প্রশ্নমালা 3

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা গুণ কর :

1. $x + (a+b), x + (a+b)$.
2. $x + a - b, x - a + b$.
3. $x^2 + (a+b)x + ab, x + c$.
4. $x^2 + ax - bx - ab, x - c$.

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর :

5. $x^2 + (a+b)x + ab, x + a$.
6. $x^2 - (a+b)x + ab, x - b$.

7. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b), b-c.$
8. $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc, x+a.$
9. $x^3+(a+b-c)x^2+(ab-ac-bc)x-abc, x^2+ax-cx-ac.$
10. $x^3+(a-b-c)x^2-(ab+ac-bc)x+abc, (x-b)(x-c).$
11. $a^2+b^2-c^2+2ab, a+b-c.$ 12. $a^3+b^3+c^3-3abc, a+b+c.$

4. সূত্র : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \dots \quad (1)$

অথবা, $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \quad \dots \quad (2)$

প্রমাণ : $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$
 $= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 অথবা, $= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$
 $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$

অনুসিদ্ধান্ত। $a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) - 3ab(a+b)$
 $= (a+b)^3 - 3ab(a+b).$

উদাহরণ 1. $2a+3b$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(2a+3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 3b + 3.2a(3b)^2 + (3b)^3$$

$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

উদাহরণ 2. $a+b+c$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(a+b+c)^3 = \{a+(b+c)\}^3 \quad ['b+c' \text{ কে একটি পদ ধরিয়া }]$$

$$= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a(b^2 + 2bc + c^2) + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc.$$

উদাহরণ 3. 1005 এর ঘন নির্ণয় কর।

$$1005^3 = (1000+5)^3 = 1000^3 + 3.1000^2.5 + 3.1000.5^2 + 5^3$$

$$= 1000000000 + 15000000 + 75000 + 125 = 1015075125.$$

উদাহরণ 4. $2a+b=3, ab=2$ হইলে, দেখাও যে, $8a^3+b^3=-9.$

$$8a^3+b^3 = (2a)^3 + b^3$$

$$= (2a+b)^3 - 3.2a.b(2a+b)$$

$$= (2a+b)^3 - 6ab(2a+b)$$

$$= 3^3 - 6.2.3 = 27 - 36 = -9.$$

উদাহরণ 5. $x+\frac{1}{x}=4$ হইলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান কত ?

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 4^3 - 3.4 = 64 - 12 = 52.$$

উদাহরণ 6. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$ হইলে, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান কত ?

$$\begin{aligned} a^3 + \frac{1}{a^3} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right) \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \left(a + \frac{1}{a}\right) - 3 \left(a + \frac{1}{a}\right) \\ &= 3 \left(a + \frac{1}{a}\right) - 3 \left(a + \frac{1}{a}\right) = 0. \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 4

ঘন নির্ণয় কর :

1. $2a+1$. 2. $2x+3y$. 3. $2a^2+3b^2$.
4. $a+2b+c$. 5. 1001. 6. 2003.

সরল কর :

7. $(x+2)^3 + (x+1)^3$. 8. $(3a+2b)^3 - (2a+b)^3$.
9. $a+b=-5$, $ab=6$ হইলে, a^3+b^3 এর মান কত ?
10. $x+2y=3$, $xy=2$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+8y^3=-9$.
11. $x + \frac{1}{x} = 1$ হইলে, $x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$ এর মান কত ? (C. U. 1935, '45)
12. $a + \frac{1}{a} = 2$ হইলে, দেখাও যে, $a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 2$.
13. $x + \frac{1}{x} = 0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$.
14. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$ হইলে, দেখাও যে, $a^3 + \frac{1}{a^3} = 0$. (C. U. 1924)

5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ কে বিপরীতভাবে লইলে হয়,
 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$;

সুতরাং a ও b দ্বারা উল্লিখিতরূপে গঠিত চারিটি রাশির যোগফলের ঘনমূল
 $= a+b$.

ইহা হইতে দেখা যায়, a র ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত রাশিটির

- (1) প্রথম পদের ঘনমূল $a =$ রাশিমালাটির ঘনমূলের প্রথম পদ, এবং
- (2) ইহার বর্গের তিনগুণ (বা $3a^2$) দ্বারা দ্বিতীয় পদ (বা $3a^2b$) কে ভাগ করিলে রাশিমালাটির ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ b পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. পূর্ণঘন রাশি $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$ কে একটি দ্বিপদের
 স্বরূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশিমালাটির পদগুলি a র ঘাতের অধঃক্রমে রহিয়াছে।

এখন, $\therefore 8a^3 = (2a)^3$;

$\therefore$ ঘনমূলের প্রথম পদ $2a$

এবং $\therefore 36a^2b \div 3(2a)^2 = 3b$;

$\therefore$ ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ $3b$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাটি ' $2a+3b$ ' এর ঘন বলিয়া প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (2a)^3 + 3(2a)^2 3b + 3.2a(3b)^2 + (3b)^3 = (2a+3b)^3.$$

উদাহরণ 2. $x=2$, $y=-3$ হইলে, $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$ এর মান কত ?

প্রদত্ত রাশিমালাটি x এর ঘাতের অধঃক্রমে রহিয়াছে এবং $27x^3=(3x)^3$ ও $54x^2y \div 3(3x)^2 = 54x^2y \div 27x^2 = 2y$.

এখন, প্রদত্ত রাশিমালাটিকে $(3x+2y)^3$ এর বিস্তৃত আকারে প্রকাশ করিয়া লও, তবে উৎপন্ন রাশিমালাটির কোন পদ ছোট বা বড় হইয়া পড়িলে যথাক্রমে যোগ বা বিয়োগ দ্বারা প্রদত্ত রাশিমালাটির সহিত সমান করিয়া লইবে।

অতএব প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= (3x)^3 + 3(3x)^2 2y + 3.3x(2y)^2 + (2y)^3 \\ &= (3x+2y)^3 \\ &= \{3 \times 2 + 2 \times (-3)\}^3 \\ &= (6-6)^3 = 0^3 = 0. \end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $x=-9$ হইলে, $x^3+15x^2+75x+225$ এর মান কত ?

প্রদত্ত রাশিটি x এর ঘাতের অধঃক্রমে রহিয়াছে এবং $x^3=(x)^3$ ও $15x^2 \div 3(x)^2 = 5$.

$$\begin{aligned} \therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^3 + 3x^2.5 + 3x.5^2 + 5^3 - 5^3 + 225 \\ &= (x+5)^3 - 125 + 225 \\ &= (-9+5)^3 + 100 \\ &= (-4)^3 + 100 \\ &= -64 + 100 = 36. \end{aligned}$$

উদাহরণ 4. $a+2b=2$ হইলে, দেখাও যে, $a^3+8b^3+12ab=8$.

$$\begin{aligned} a^3+8b^3+12ab &= a^3 + (2b)^3 + 12ab \\ &= (a+2b)^3 - 3a.2b(a+2b) + 12ab \\ &= 2^3 - 6ab.2 + 12ab = 8. \end{aligned}$$

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$(4x-3y)^3 + (5y-2x)^3 + 6(x+y)(4x-3y)(5y-2x).$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (4x-3y)^3 + (5y-2x)^3 + 3(2x+2y)(4x-3y)(5y-2x) \\ &= (4x-3y)^3 + (5y-2x)^3 + 3\{(4x-3y) + (5y-2x)\} \\ &\quad \times (4x-3y)(5y-2x) \\ &= (4x-3y+5y-2x)^3 \\ &= (2x+2y)^3 = \{2(x+y)\}^3 \\ &= 8(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3). \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 5

দ্বিপদের ঘনরূপে প্রকাশ কর :

1. $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$.
2. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.
3. $a^3 + 12a^2 + 48a + 64$.
4. $8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3$.

মান নির্ণয় কর :

5. $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$, যখন $a = -5$.
6. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 36$, যখন $x = -2$.
7. $27a^3 + 135a^2b + 225ab^2 + 125b^3$, যখন $a = 5$, $b = -3$.
8. $a + b = 3$ হইলে, দেখাও যে, $a^3 + b^3 + 9ab = 27$. (C. U. 1927)
9. $p^2 + q^2 = r^2$ হইলে, দেখাও যে, $p^6 + q^6 + 3p^2q^2r^2 = r^6$.

সরল কর :

10. $(a+b)^3 + 3(a+b)^2(a-b) + 3(a+b)(a-b)^2 + (a-b)^3$.
11. $(4x-1)^3 + (2-3x)^3 + 3(x+1)(4x-1)(2-3x)$.
12. $(1+6x)^3 + (3-4x)^3 + 6(2+x)(1+6x)(3-4x)$.
13. $(3b-a)^3 + (4a-3b)^3 + 9a(3b-a)(4a-3b)$.
14. $(a+b+c)^3 + (a+b-c)^3 + 6(a+b)\{(a+b)^2 - c^2\}$.

$$6. \text{ সূত্র : } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{অথবা, } = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

$$\begin{aligned} \text{প্রমাণ : } (a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b) \\ &= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{অথবা, } &= a^3 - 3ab(a-b) - b \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{অনুসিদ্ধান্ত। } a^3 - b^3 &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) + 3ab(a-b) \\ &= (a-b)^3 + 3ab(a-b). \end{aligned}$$

মন্তব্য। অনু. 4 এর সূত্রগুলিতে b র জায়গায় $-b$ ধরিলে অনু. 6 এর সূত্রগুলি পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $2x - 3y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} (2x-3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x(3y)^2 - (3y)^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3. \end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $a - b - c$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} (a-b-c)^3 &= \{a - (b+c)\}^3 \\ &= a^3 - 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 - (b+c)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3a(b^2 + 2bc + c^2) - (b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) \\ &= a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 - b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3 \\ &= a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 3b^2c - 3bc^2 + 6abc. \end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $2a-3b=1$ এবং $ab=2$ হইলে, $8a^3-27b^3$ এর মান কত ?

$$\begin{aligned} 8a^3-27b^3 &= (2a)^3 - (3b)^3 \\ &= (2a-3b)^3 + 3 \cdot 2a \cdot 3b(2a-3b) \\ &= (2a-3b)^3 + 18ab(2a-3b) \\ &= 1^3 + 18 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 36 = 37. \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 6

ঘন নির্ণয় কর :

1. $1-3a$.
2. $4x-3$.
3. $3m-4n$.
4. ax^2-by^2 .
5. $x-y+z$.

সরল কর :

6. $(x+1)^3+(x-1)^3$.
7. $(2a+3b)^3-(2a-3b)^3$.
8. $a-b=2$, $ab=3$ হইলে, a^3-b^3 এর মান কত ?
9. $a-b=p$, $ab=q$ হইলে, দেখাও যে, $a^3-b^3=p^3+3pq$.
10. $2x-3y=1$, $xy=2$ হইলে, দেখাও যে, $8x^3-27y^3=37$.
11. $a-\frac{1}{a}=3$ হইলে, $a^3-\left(\frac{1}{a}\right)^3$ এর মান কত ?
12. $x-\frac{1}{x}=p$ হইলে, দেখাও যে, $x-\frac{1}{x^3}=p^3+3p$. (C. U. 1910, '36)

7. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ কে বিপরীতভাবে লইলে হয়,
 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$;

সুতরাং a ও b দ্বারা উল্লিখিতরূপে গঠিত চারিটি রাশির বীজগণিতীয় যোগফলের
 ঘনমূল $a-b$.

ইহা হইতে দেখা যায়, a র ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত রাশিমালাটির

(1) প্রথম পদের ঘনমূল a =রাশিমালাটির ঘনমূলের প্রথম পদ, এবং

(2) ইহার বর্গের তিনগুণ (বা $3a^2$) দ্বারা দ্বিতীয় পদ $-3a^2b$ কে ভাগ করিলে
 রাশিমালাটির ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ $-b$ পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. পূর্ণঘন রাশি $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$ কে একটি দ্বিপদের
 ঘনরূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশিমালাটির পদগুলি a র ঘাতের অধঃক্রমে রহিয়াছে।

এখন, $\therefore 8a^3=(2a)^3$; $\therefore$ ঘনমূলের প্রথম পদ $2a$

এবং $\therefore -12a^2b \div 3(2a)^2 = -b$; $\therefore$ ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ $-b$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাটি ' $2a-b$ 'এর ঘন বলিয়া প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

প্রদত্ত রাশি $= (2a)^3 - 3(2a)^2b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 - b^3 = (2a-b)^3$.

উদাহরণ 2. $x=4$, $y=2$ হইলে, $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27x^3$ এর মান কত?

প্রদত্ত রাশিমালাটি x এর ঘাতের অধঃক্রমে রহিয়াছে; ইহার $8x^3 = (2x)^3$ এবং $-36x^2y \div 3(2x)^2 = -36x^2y \div 12x^2 = -3y$.

এখন প্রদত্ত রাশিমালাটিকে $(2x-3y)^3$ এর বিস্তৃত আকারে প্রকাশ করিয়া লও, তবে উৎপন্ন রাশিমালাটির কোন পদ ছোট বা বড় হইয়া পড়িলে যথাক্রমে যোগ বা বিয়োগ দ্বারা প্রদত্ত রাশিমালাটির সহিত সমান করিয়া লইবে।

অতএব প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতরূপ হইবে:

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= (2x)^3 - 3(2x)^2 3y + 3.2x(3y)^2 - (3y)^3 \\ &= (2x-3y)^3 = (2 \times 4 - 3 \times 2)^3 = (8-6)^3 = 2^3 = 8.\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $x=6$ হইলে, $x^3 - 12x^2 + 48x - 27$ এর মান কত?

প্রদত্ত রাশিটি x এর ঘাতের অধঃক্রমে রহিয়াছে; উহার $x^3 = (x)^3$ এবং $-12x^2 \div 3(x)^2 = -4$.

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^3 - 3x^2.4 + 3x.4^2 - 4^3 + 4^3 - 27 \\ &= (x-4)^3 + 64 - 27 = (6-4)^3 + 37 = 2^3 + 37 = 45.\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 7

দ্বিপদের ঘনরূপে প্রকাশ কর:

- $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$.
- $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.
- $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$.

মান নির্ণয় কর:

- $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$, যখন $a=3$.
- $1 - 12a + 48a^2 - 64a^3$, যখন $a=\frac{1}{2}$.
- $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$, যখন $x=5$.
- $8x^3 - 12x^2 + 6x - 8$, যখন $x=-1$.
- $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$, যখন $x=3$ এবং $y=2$.
- $x - 2y = 3$ হইলে, দেখাও যে, $x^3 - 8y^3 - 18xy = 27$.
- $2p - 3q = 4$ হইলে, দেখাও যে, $8p^3 - 27q^3 - 72pq = 64$.

সরল কর:

- $(a+b)^3 - 3(a+b)^2(a-b) + 3(a+b)(a-b)^2 - (a-b)^3$.
- $(2x+y)^3 - (2y+x)^3 - 3(2x+y)(2y+x)\{(2x+y) - (2y+x)\}$.
- $(4x+3)^3 - (2+3x)^3 - 3(x+1)(4x+3)(2+3x)$.
- $(2x+3y)^3 - (3y-2x)^3 - 12x(2x+3y)(3y-2x)$.
- $(a+b-c)^3 - (a-b+c)^3 - 6(b-c)\{a^2 - (b-c)^2\}$.

8. সূত্র: $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

প্রমাণ: বাম পক্ষ $= a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

উদাহরণ 1. $2a+3b$ এবং $4a^2 - 6ab + 9b^2$ এর গুণফল নির্ণয় কর।
 $(2a+3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2) = (2a+3b)\{(2a)^2 - 2a.3b + (3b)^2\}$
 $= (2a)^3 + (3b)^3 = 8a^3 + 27b^3$.

প্রশ্নমালা ৪

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x+1)(x^2-x+1)$.
2. $(x+2)(x^2-2x+4)$.
3. $(2a+3)(4a^2-6a+9)$.
4. $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$.
5. $(4x^2-6xy+9y^2)(2x+3y)$.
6. $(25a^2-20ab+16b^2)(5a+4b)$.
7. $(2ab+3c)(4a^2b^2+9c^2-6abc)$.
8. $(3x^2+2y)(9x^4-6x^2y+4y^2)$.

সরল কর :

9. $(a+4)(a^2-4a+16)-(a+3)(a^2-3a+9)$.
10. $(x+y)(x^2-xy+y^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)$.

9. সূত্র : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

প্রমাণ : বাম পক্ষ $=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3=a^3-b^3$.

মন্তব্য। অতঃ ৪ এর স্থত্রে b র জন্ম $-b$ ধরিলে অতঃ ৯ এর স্থত্রে পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $4a^4+2a^2+1$ কে $2a^2-1$ দ্বারা গুণ কর।

$$\therefore \text{নির্ণয় গুণফল} = (2a^2-1)\{(2a^2)^2+2a^2.1+1^2\} \\ = (2a^2)^3-1^3=8a^6-1.$$

প্রশ্নমালা ৯

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x-1)(x^2+x+1)$.
2. $(x-2)(x^2+2x+4)$.
3. $(2a-1)(4a^2+2a+1)$.
4. $(a-3b)(9b^2+3ab+a^2)$.
5. $(4x^2+6xy+9y^2)(2x-3y)$.
6. $(ab-2c)(a^2b^2+2abc+4c^2)$.
7. $(3a^2-4b)(9a^4+12a^2b+16b^2)$.
8. $(2ab-3cd)(4a^2b^2+6abcd+9c^2d^2)$.

সরল কর :

9. $(a-2)(a^2+2a+4)-(a-3)(a^2+3a+9)$.
10. $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)$.

10. a^3+b^3 বা a^3-b^3 এর আকারে প্রকাশিত রাশির উৎপাদক।

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $8x^4-27xy^3$.

$$8x^4-27xy^3 = x(8x^3-27y^3) \\ = x\{(2x)^3-(3y)^3\} \\ = x(2x-3y)\{(2x)^2+2x.3y+(3y)^2\} \\ = x(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2).$$

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : a^6-b^6 .

$$a^6-b^6 = (a^3)^2-(b^3)^2 \\ = (a^3+b^3)(a^3-b^3) \\ = (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

অথবা, $a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3 \\ = (a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2.b^2+(b^2)^2\}$

$$\begin{aligned}
&= (a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4) \\
&= (a+b)(a-b)\{(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2\} \\
&= (a+b)(a-b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\} \\
&= (a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).
\end{aligned}$$

বিশেষ দৃষ্টব্য। কোনও রাশি দুইটি বর্গের এবং দুইটি ঘনের অন্তরে প্রকাশযোগ্য হইলে, উহাকে দুইটি বর্গের অন্তরে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ করাই সুবিধাজনক।

প্রশ্নমালা 10

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. x^3+1 . (C. U. 1910)
2. a^3+8 .
3. a^3-8b^3 . (C. U. 1919, '31)
4. x^3+64y^3 . (C. U. 1923)
5. $8x^3+27y^3$.
6. $27a^4-64ab^3$.
7. a^6+b^6 .
8. $27x^6+125y^6$.
9. $8a^3b^3-125c^6$.
10. x^6-64 .
11. a^9+b^9 .
12. x^6-64y^{12} .
13. $a^{12}-b^{12}$.
14. $(a+b)^3+(a-b)^3$.
15. $(3x+2)^3-(2x+1)^3$.

11. x^2+px+q এর আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

প্রথম নিয়ম। পর্যবেক্ষণপূর্বক উৎপাদক নির্ণয়।

$$x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab$$

$$=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$$

সুতরাং $x^2+(a+b)x+ab$ এর উৎপাদক হইবে দুইটি দ্বিপদ রাশি, যাহাদের প্রথম পদ হইবে x^2 এর বর্গমূল, অর্থাৎ x এবং দ্বিতীয় পদ হইবে এমন দুইটি রাশি, যাহাদের গুণফল ab এবং যোগফল $a+b$. কাজেই x^2+px+q এর আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে x -বর্জিত পদ q কে এমন দুইটি উৎপাদকে বিভক্ত করিয়া লইতে হয়, যাহাদের যোগফল x এর সহগ, অর্থাৎ p এর সমান। যদি q কে ঐরূপ দুইটি উৎপাদকে বিভক্ত করা সম্ভবপর না হয়, তবে নিয়মটি প্রযোজ্য হইবে না।

উদাহরণ 1. $x^2+12x+20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিয়া লইতে হইবে, যাহাদের গুণফল 20 এবং যোগফল 12. গুণফল 20 ধনাত্মক বলিয়া উভয় সংখ্যাই ধনাত্মক বা উভয় সংখ্যাই ঋণাত্মক হইতে পারে কিন্তু উহাদের যোগফল 12 ধনাত্মক বলিয়া নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি শুধু ধনাত্মক হইবে। এখন,

1 ও 20 এর গুণফল 20 এবং যোগফল 21,

2 ও 10 এর গুণফল 20 এবং যোগফল 12; সুতরাং

উৎপাদকদ্বয়ের প্রথম পদ x^2 এর বর্গমূল, অর্থাৎ x এবং দ্বিতীয় পদ 2 ও 10:

$$\therefore x^2+12x+20=(x+2)(x+10).$$

$$\begin{aligned}\text{প্রক্রিয়া : } x^2 + 12x + 20 &= x^2 + 2x + 10x + 20 \\ &= x(x+2) + 10(x+2) \\ &= (x+2)(x+10).\end{aligned}$$

মন্তব্য। মধ্য পদকে দুইটি পদে বিভক্ত করিয়া যে কোনটিকে আগে বা পরে বসান চলে। যেমন, প্রদত্ত রাশিমালাটি লইয়া,

$$\begin{aligned}x^2 + 12x + 20 &= x^2 + 10x + 2x + 20 \\ &= x(x+10) + 2(x+10) \\ &= (x+10)(x+2).\end{aligned}$$

উভয় স্থলেই একই উৎপাদক পাওয়া গিয়াছে।

উদাহরণ 2. $x^2 - 29x - 30$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিয়া লইতে হইবে, যাহাদের গুণফল -30 এবং যোগফল -29 । গুণফল ঋণাত্মক বলিয়া নির্ণেয় সংখ্যা দুইটির একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, এবং যোগফল ঋণাত্মক বলিয়া সংখ্যা দুইটির মধ্যে যেটির পরমমান বৃহত্তর সেইটিই ঋণাত্মক। এখন,

1 ও -30 এর গুণফল -30 এবং যোগফল -29 ;

$$\therefore x^2 - 29x - 30 = (x+1)(x-30)$$

$$\begin{aligned}\text{প্রক্রিয়া : } x^2 - 29x - 30 &= x^2 + x - 30x - 30 \\ &= x(x+1) - 30(x+1) \\ &= (x+1)(x-30).\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $(x^2 - 3x)^2 - 8(x^2 - 3x) - 20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2 - 8a - 20 \quad [x^2 - 3x \text{ কে } a \text{ ধরিয়া}] \\ &= (a+2)(a-10) \\ &= (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 10) \\ &= (x-1)(x-2)(x+2)(x-5).\end{aligned}$$

দ্বিতীয় নিয়ম। দুইটি বর্গের অন্তরে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয়।

তুলনামূলক আলোচনার সুবিধার জ্ঞান পরবর্তী উদাহরণ দুইটি দ্বিতীয় নিয়মে কষা গেল। তৃতীয় পদটি খুব বড় সংখ্যা না হইলে প্রথম নিয়মই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 4. $x^2 + 12x + 20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x^2 + 12x$ এর সহিত 'x এর সহগের অর্ধেকের বর্গ', অর্থাৎ $(\frac{12}{2})^2$ বা 36 যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ হইবে। অতএব 36 যোগ ও বিয়োগ করিয়া লও।

$$\begin{aligned}\therefore x^2 + 12x + 20 &= x^2 + 12x + 36 - 36 + 20 \\ &= (x^2 + 12x + 36) - 16 \\ &= (x+6)^2 - 4^2 \\ &= (x+6+4)(x+6-4) \\ &= (x+10)(x+2).\end{aligned}$$

উদাহরণ 5. $x^2 - 2x - 899$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $x^2 - 2x$ এর সহিত $(-\frac{2}{2})^2$ বা 1 যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ হইবে।

$$\begin{aligned}\therefore x^2 - 2x - 899 &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 899 \\ &= (x^2 - 2x + 1) - 900 \\ &= (x - 1)^2 - 30^2 \\ &= (x - 1 + 30)(x - 1 - 30) \\ &= (x + 29)(x - 31).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 11

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^2 + 3x + 2$.
2. $x^2 + 4x + 3$.
3. $x^2 + 5x + 4$.
4. $x^2 + 5x + 6$.
5. $x^2 - 5x + 6$.
6. $x^2 + 5x - 6$.
7. $x^2 - 5x - 6$.
8. $x^2 + 7x + 6$.
9. $x^2 - 7x + 6$.
10. $x^2 + x - 6$.
11. $x^2 - x - 6$.
12. $x^2 + x - 12$.
13. $x^2 - 12x + 20$.
14. $x^2 + 4x - 21$.
15. $x^2 - 3x - 28$.
16. $x^2 + 15x + 36$.
17. $x^2 - 22x + 40$.
18. $x^2 + 12x - 45$.
19. $a^2 - 13a - 48$.
20. $a^2 - 15a + 54$.
21. $a^2 + 17a - 60$.
22. $m^2 - 20m + 64$.
23. $n^2 + 14n - 72$.
24. $p^2 - 22p - 75$.
25. $a^2 - 18a + 80$.
26. $a^2 + 40a - 84$.
27. $a^2 - a - 90$.
28. $a^2 + 97a + 96$.
29. $a^2 - 20a + 99$.
30. $a^2 - 2a - 120$.
31. $x^2 + 6xy + 8y^2$.
32. $x^2 + 4xy - 12y^2$.
33. $x^2 - 19xy + 18y^2$.
34. $x^2 - 10xy + 21y^2$.
35. $x^2 + xy - 30y^2$.
36. $x^2 - 12xy + 35y^2$.
37. $a^2 - 14ab + 40b^2$.
38. $a^2 - 26ab - 56b^2$.
39. $a^2 - 28ab - 60b^2$.
40. $p^2 + 38pq + 72q^2$.
41. $p^2 - 40pq + 76q^2$.
42. $p^2 - 95pq - 96q^2$.
43. $a - 3a^2 + 2$.
44. $a^4 - 5a^2 + 4$.
45. $a^4 - 10a^2b^2 + 9b^4$.
46. $x^6 + 3x^3 + 2$.
47. $x^6 - 4x^3 + 3$.
48. $x^6 + 7x^3 - 8$.
49. $x^6 - 9x^3y^3 + 8y^6$.
50. $x^8 - 17x^4 + 16$.
51. $x^{12} - 9x^6 + 8$.
52. $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$.
53. $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8$.
54. $(a^2 - a)^2 - 8(a^2 - a) + 12$.
55. $(a^2 - 4a)^2 + 7(a^2 - 4a) + 12$.
56. $(x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24$.
57. $(a^2 - 5a)^2 - 2(a^2 - 5a) - 24$.
58. $(a + b)^2 + 3(a + b)(a - b) + 2(a - b)^2$.
59. $(2x - y)^2 - (2x - y)(x - 2y) - 2(x - 2y)^2$.
60. $(3x - 5y)^2 - 3(3x - 5y)(x - 3y) + 2(x - 3y)^2$.

12. px^2+qx+r এর আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

এরূপ স্থলে পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রক্রিয়ার অনুরূপ প্রণালী অবলম্বন করিতে হয়। পরবর্তী উদাহরণগুলি দ্বারা তিনটি প্রণালী প্রদর্শিত হইল। প্রথম প্রণালীই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. $2x^2-7x+6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম প্রণালী। x^2 এর সহগ 2 কে x -বর্জিত পদ 6 দ্বারা গুণ কর, গুণফল 12 হইল। এখন এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল=12 এবং যোগফল= x এর সহগ, অর্থাৎ -7 ।

স্পষ্টতঃই সংখ্যা দুইটি -3 এবং -4 ।

$$\begin{aligned}\therefore 2x^2-7x+6 &= 2x^2-3x-4x+6 \\ &= x(2x-3)-2(2x-3) \\ &= (2x-3)(x-2).\end{aligned}$$

দ্বিতীয় প্রণালী। প্রদত্ত রাশিটিকে x^2 এর সহগ দ্বারা গুণ ও ভাগ করিয়া x^2+px+q এর আকারে প্রকাশ কর এবং পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে প্রদত্ত প্রথম নিয়মটি প্রয়োগ কর।

$$\begin{aligned}2x^2-7x+6 &= \frac{1}{2}(4x^2-14x+12) \\ &= \frac{1}{2}(a^2-7a+12) \quad [2x\text{এর জায়গায় } a \text{ লিখিয়া}] \\ &= \frac{1}{2}(a-3)(a-4) \quad [\text{প্রথম নিয়ম, অনু. 11}] \\ &= \frac{1}{2}(2x-3)(2x-4) \quad [a\text{র জায়গায় } 2x \text{ লিখিয়া}] \\ &= (2x-3)(x-2).\end{aligned}$$

তৃতীয় প্রণালী। প্রদত্ত রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তরে প্রকাশ করিয়া পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের দ্বিতীয় নিয়মটি প্রয়োগ কর।

$$\begin{aligned}2x^2-7x+6 &= 2(x^2-\frac{7}{2}x+3) \\ &= 2\{x^2-\frac{7}{2}x+(\frac{7}{4})^2-(\frac{7}{4})^2+3\} \\ &= 2\{x^2-\frac{7}{2}x+(\frac{7}{4})^2-\frac{1}{4}\} \\ &= 2\{(x-\frac{7}{4})^2-(\frac{1}{4})^2\} \\ &= 2(x-\frac{7}{4}+\frac{1}{4})(x-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}) \\ &= 2(x-\frac{3}{2})(x-2) \\ &= (2x-3)(x-2).\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $8x^2-14xy+5y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম প্রণালী। এখানে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের গুণফল $= 8 \times 5y^2 = 40y^2$ এবং যোগফল $= -14y$ । স্পষ্টতঃই রাশি দুইটি $-4y$ এবং $-10y$ ।

$$\begin{aligned}\therefore 8x^2-14xy+5y^2 &= 8x^2-4xy-10xy+5y^2 \\ &= 4x(2x-y)-5y(2x-y) \\ &= (2x-y)(4x-5y).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 12

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

- | | | |
|--|----------------------------|--------------------|
| 1. $2x^2+5x+3$. | 2. $2x^2-5x+3$. | 3. $2x^2+5x-3$. |
| 4. $2x^2-5x-3$. | 5. $2x^2+x-3$. | 6. $2x^2-x-3$. |
| 7. $2x^2+7x+3$. | 8. $2x^2-7x+3$. | 9. $2x^2-x-1$. |
| 10. $2x^2+x-1$. | 11. $3x^2+5x-2$. | 12. $3x^2-5x+2$. |
| 13. $3x^2-7x+4$. | 14. $3x^2+x-4$. | 15. $3x^2-11x-4$. |
| 16. $2x^2+x-15$. | 17. $4x^2-4x-3$. | 18. $6-7a+2a^2$. |
| (C. U. 1952) | (C. U. 1931) | (C. U. 1929) |
| 19. $4x^2+11x+6$. | 20. $4x^2-11x+6$. | 21. $4x^2-5x-6$. |
| 22. $4x^2-12x-7$. | 23. $4x^2+31x-8$. | 24. $4x^2-16x-9$. |
| 25. $6a^2-17a+10$. | 26. $6a^2+5a-11$. | 27. $6-a-12a^2$. |
| 28. $6a^2+a-12$. | 29. $6a^2-19a+13$. | |
| 30. $6a^2+25a+14$. | 31. $4a^2-13ab+3b^2$. | |
| 32. $4a^2+23ab-6b^2$. | 33. $5a^2-13ab+6b^2$. | |
| 34. $6a^2+ab-7b^2$. | 35. $6a^2+13ab-8b^2$. | |
| 36. $6a^2-47ab-8b^2$. | 37. $6a^2+25ab-9b^2$. | |
| 38. $6a^2-55ab+9b^2$. | 39. $8a^2+ab-7b^2$. | |
| 40. $8x^2-65xy+8y^2$. | 41. $8m^2+21mn-9n^2$. | |
| 42. $9p^2+80pq-9q^2$. | 43. $9a^2-19ab+10b^2$. | |
| 44. $9a^2-100ab+11b^2$. | 45. $10a^2-37ab-12b^2$. | |
| 46. $2x^4+x^2-3$. | 47. $4x^4-17x^2+4$. | |
| 48. $4x^4-13x^2y^2+9y^4$. | 49. $9a^4-37a^2b^2+4b^4$. | |
| 50. $8a^6+9a^3+1$. | 51. $8x^6-7x^3-1$. | |
| 52. $8x^6+63x^3y^3-8y^6$. | 53. $4x^8-5x^4+1$. | |
| 54. $4x^8-3x^4y^4-y^8$. | 55. $2(x+y)^2-3(x+y)+1$. | |
| 56. $2(a^2-a)^2-5(a^2-a)+2$. | | |
| 57. $2(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)xy-10x^2y^2$. | | |
| 58. $4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2$. | | |

(C. U. 1947)

13. দুই অক্ষরবিশিষ্ট দ্বিতীয় মানের সাধারণ রাশি।

উদাহরণ। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $2x^2+3xy+y^2+7x+5y+6$.এদন্ত রাশি $=2x^2+(3y+7)x+y^2+5y+6$

$$[x\text{এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া}]$$

$$=2x^2+(3y+7)x+(y+2)(y+3).$$

এখন, px^2+qx+r এই আকারবিশিষ্ট রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিবার প্রণালী অনুযায়ী, x^2 এর সহগ 2 এবং x -বর্জিত পদ $(y+2)(y+3)$ এই দুইএর গুণফল $2(y+2)(y+3)$ কে এমন দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া লও, যেন উহাদের সমষ্টি x এর সহগ $3y+7$ এর সমান হয়।

পরীক্ষা করিয়া দেখা গেল, উৎপাদকদ্বয় $2(y+2)$ এবং $(y+3)$ । তাহা হইলে,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 2x^2 + \{2(y+2) + (y+3)\}x + (y+2)(y+3) \\ &= 2x^2 + 2(y+2)x + (y+3)x + (y+2)(y+3) \\ &= 2x(x+y+2) + (y+3)(x+y+2) \\ &= (x+y+2)(2x+y+3).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 13

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^2+2ax+(a+1)(a-1)$.
2. $x^2-2ax+(a+1)(a-1)$.
3. $x^2+x-(a+1)(a+2)$.
4. $x^2-x-(a+1)(a+2)$.
5. $a^2+(2b+5)a+b^2+5b+6$.
6. $x^2+2xy+x+y^2+y-6$.
7. $x^2-2xy+x+y^2-y-6$.
8. $2a^2-3a-(b+2)(2b+1)$.

14. a^2-b^2 , $a^3\pm b^3$, $a^5\pm b^5$ প্রভৃতি দ্বিপদ রাশি।

a^3+b^3 , a^5+b^5 প্রভৃতির একটি উৎপাদক $a+b$ এবং a^2-b^2 , a^3-b^3 , a^5-b^5 প্রভৃতির একটি উৎপাদক $a-b$ মনে রাখিলে উৎপাদক নির্ণয়ে বিশেষ সুবিধা হইবে। আবশ্যকমত অতিরিক্ত পদ যোগ ও বিয়োগ করিয়া গৃহীত রাশিমালাকে এমন রাশিমালায় পরিণত করিয়া লইবে, যেন পর পর প্রতি দুই দুইটি পদের উল্লিখিত উৎপাদকটি থাকে।

উদাহরণ 1. a^3+b^3 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3 \\ &= a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2).\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. a^5-b^5 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}a^5-b^5 &= a^5-a^4b+a^4b-a^3b^2+a^3b^2-a^2b^3+a^2b^3-ab^4+ab^4-b^5 \\ &= a^4(a-b)+a^3b(a-b)+a^2b^2(a-b)+ab^3(a-b)+b^4(a-b) \\ &= (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 14

স্বত্রের সাহায্য না লইয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. a^2-b^2 .
2. a^3-b^3 .
3. a^3+1 .
4. a^3-1 .
5. a^3+8 .
6. a^5+b^5 .
7. a^5-b^5 .
8. a^5+1 .

15. বিপরীত রাশিমালা।

কোন রাশিমালাকে উহার কোন অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে বা উর্ধ্বক্রমে সাজাইলে যদি প্রথম ও শেষ পদের এবং ঐ পদদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী দুই দুইটি পদের সাংখ্য সহগ সমান হয়, তবে ঐ রাশিমালাকে বিপরীত রাশিমালা (Reciprocal expression) বলে। যেমন,

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

$$\text{এবং } x^5 - 4x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 4xy^4 - y^5.$$

এইরূপ রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, প্রথম ও শেষ পদকে, এবং প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী দুই দুইটি পদকে একত্র লইয়া রাশিটিকে $px^2 + qx + r$ এর আকারে পরিণত করিয়া লইয়া কার্য করিতে হয়।

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

(C. U. 1942)

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^4 + 1) + (x^3 + x) + 2x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x(x^2 + 1) + 2x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 1 + x) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= 2(x^4 + 1) - (5x^3 + 5x) + 6x^2 \\ &= 2\{(x^2 + 1)^2 - 2x^2\} - 5x(x^2 + 1) + 6x^2 \\ &= 2(x^2 + 1)^2 - 4x^2 - 5x(x^2 + 1) + 6x^2 \\ &= 2(x^2 + 1)^2 - 5x(x^2 + 1) + 2x^2 \\ &= 2a^2 - 5ax + 2x^2 \quad [x^2 + 1 \text{ কে } a \text{ ধরিয়া}] \\ &= 2a^2 - 4ax - ax + 2x^2 \\ &= 2a(a - 2x) - x(a - 2x) = (a - 2x)(2a - x) \\ &= (x^2 + 1 - 2x)\{2(x^2 + 1) - x\} = (x - 1)^2(2x^2 - x + 2). \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 15

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. | 2. $x^3 - 2x^2 - 2x + 1$. |
| 3. $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. | 4. $2x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$. |
| 5. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$. | 6. $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 1$. |

16. উৎপাদক নির্ণয়ের কতিপয় কৌশল।

(1) পরীক্ষা দ্বারা উৎপাদক নির্ণয়।

আমরা জানি, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$; সুতরাং $x = 2$ ধরিলে ডান পক্ষের মান 0 হয় বলিয়া বাম পক্ষের মানও 0 হইবে। পক্ষান্তরে, কোন রাশিমালায় $x = 2$ ধরিলে যদি রাশিমালাটির মান 0 হয়, তবে $x - 2$ উহার একটি উৎপাদক হইবে।

আবার, $x = -3$ ধরিলে ডান পক্ষের মান 0 হয় বলিয়া বাম পক্ষের মানও 0 হইবে। পক্ষান্তরে, কোনও রাশিমালায় $x = -3$ ধরিলে যদি রাশিমালাটির মান 0 হয়, তবে $x+3$ উহার একটি উৎপাদক হইবে।

সাধারণভাবে, কোনও রাশিমালায় $x = a$ এবং $x = -a$ ধরিলে যদি রাশিমালাটির মান 0 হয়, তবে যথাক্রমে $x - a$ এবং $x + a$ রাশিমালাটির দুইটি উৎপাদক হইবে।

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$.

x এর মান -2 ধরিলে রাশিটির মান 0 হয়; সুতরাং রাশিটির একটি উৎপাদক $x+2$ হইবে। এখন গৃহীত রাশিমালাকে এমন রাশিমালায় পরিণত করিয়া লও যেন পর পর প্রতি দুই দুইটি পদের $x+2$ উৎপাদক থাকে।

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - 12x - 24 \\ &= x^2(x+2) + x(x+2) - 12(x+2) \\ &= (x+2)(x^2 + x - 12) \\ &= (x+2)(x-3)(x+4).\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 21x - 36$.

x এর মান 3 ধরিলে রাশিটির মান 0 হয়; সুতরাং রাশিটির একটি উৎপাদক $x-3$ হইবে।

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^4 - 3x^3 + 6x^3 - 18x^2 + 11x^2 - 33x + 12x - 36 \\ &= x^3(x-3) + 6x^2(x-3) + 11x(x-3) + 12(x-3) \\ &= (x-3)(x^3 + 6x^2 + 11x + 12).\end{aligned}$$

এখন, x এর মান -4 ধরিলে $x^3 + 6x^2 + 11x + 12$ এর মান 0 হয়; সুতরাং উহার একটি উৎপাদক $x+4$ হইবে।

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x-3)(x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 8x + 3x + 12) \\ &= (x-3)\{x^2(x+4) + 2x(x+4) + 3(x+4)\} \\ &= (x-3)(x+4)(x^2 + 2x + 3).\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $8x^3 + 4x - 3$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (2x)^3 + 2.2x - 3$$

$$= a^3 + 2a - 3$$

[$2x$ এর জগ্য a ধরিয়া]

এখন, a র মান 1 ধরিলে $a^3 + 2a - 3$ এর মান 0 হয়; সুতরাং রাশিটির একটি উৎপাদক $a-1$ হইবে।

$$\begin{aligned}\therefore a^3 + 2a - 3 &= a^3 - a^2 + a^2 - a + 3a - 3 \\ &= a^2(a-1) + a(a-1) + 3(a-1) \\ &= (a-1)(a^2 + a + 3) \\ &= (2x-1)(4x^2 + 2x + 3).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 16

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.
2. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
3. $x^3 + x^2 - 5x + 3$.
4. $x^3 - x^2 - 10x - 8$.
5. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.
6. $x^3 - 7x + 6$.
7. $2x^3 + 7x^2 - 9$.
8. $x^3 + x^2y - 10xy^2 + 8y^3$.
9. $4x^3 - 7x + 3$.
10. $4x^3 - 19x - 15$.
11. $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$.
12. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$.
13. $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$. [x^2 এর জায়গায় a ধরিয়া কষ ।]

(2) দুইটি বর্গরাশির অন্তর সংগবদ্ধ করিয়া ।

উদাহরণ। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a(a+c) - b(b+c)$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2 + ac - b^2 - bc \\ &= a^2 - b^2 + ac - bc \\ &= (a+b)(a-b) + c(a-b) \\ &= (a-b)(a+b+c). \end{aligned}$$

(3) দুইটি ঘনরাশির সমষ্টি বা অন্তরে সংগবদ্ধ করিয়া ।

উদাহরণ। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^3 + 8) + (7x^2 + 14x) \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4) + 7x(x+2) \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4 + 7x) \\ &= (x+2)(x^2 + 5x + 4) \\ &= (x+2)(x+1)(x+4). \end{aligned}$$

(4) দুইটি ঘনরাশির সমষ্টি বা অন্তরে প্রকাশ করিয়া ।

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 \\ &= (x+1)^3 + 1^3 \\ &= (x+1+1)\{(x+1)^2 - (x+1).1 + 1^2\} \\ &= (x+2)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^3 + 6a^2 + 12a + 7$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8 - 1 \\ &= (a+2)^3 - 1^3 \\ &= (a+2-1)\{(a+2)^2 + (a+2).1 + 1^2\} \\ &= (a+1)(a^2 + 5a + 7). \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 17

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $a^2 - ac + bc - b^2$.
2. $x(x+z) - y(y+z)$.
3. $a^2 + 2ac + 6bc - 9b^2$.
4. $4a^2 - 4ac + 6bc - 9b^2$.
5. $16x^2 + 12mx + 15my - 25y^2$.
6. $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$.
7. $a^2(a-2b) - b^2(b-2a)$.
8. $a^3 - 3a^2 - 6a + 8$.
9. $8x^3 + 18x^2 - 27x - 27$.
10. $x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4$.
11. $2a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.
12. $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$.
13. $a^3 + 6a^2 + 12a - 19$.
14. $x^3 + 9x^2 + 27x + 26$.

(5) দ্বিমাত্র ও একমাত্র পদগুলিকে পৃথক পৃথকভাবে একত্র লইয়া।

উদাহরণ। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz + x - y + z$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^2 - y^2 + z^2 + 2xz) + (x - y + z) \\ &= \{(x^2 + z^2 + 2xz) - y^2\} + (x - y + z) \\ &= \{(x+z)^2 - y^2\} + (x - y + z) \\ &= (x+y+z)(x-y+z) + (x - y + z) \\ &= (x-y+z)(x+y+z+1). \end{aligned}$$

(6) চারিটি উৎপাদক দ্বারা গঠিত পদকে দুইটি রাশির গুণফলে প্রকাশ করিয়া।

উদাহরণ। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)+6$.

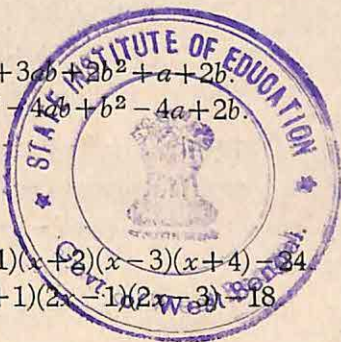
$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \{(x+1)(x-3)\}\{(x-2)(x-4)\}+6 \\ &= (x^2-2x-3)(x^2-2x-8)+6 \\ &= a(a-5)+6 \quad [x^2-2x-3 \text{ কে } a \text{ ধরিয়া}] \\ &= a^2-5a+6=(a-2)(a-3) \\ &= (x^2-2x-3-2)(x^2-2x-3-3) \\ &= (x^2-2x-5)(x^2-2x-6). \end{aligned}$$

বিশেষ দৃষ্টব্য। উল্লিখিত সমাধানে উৎপাদক চারিটিকে দুই দুইটি করিয়া এমনভাবে লইয়া গুণ করা হইয়াছে, যেন গুণফল দুইটির x^2 এর সহগদ্বয় এবং x এর সহগদ্বয় সমান হয়।

প্রশ্নমালা 18

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

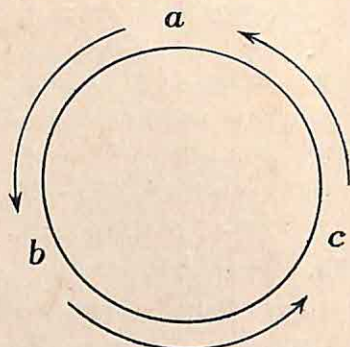
1. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y$.
2. $a^2 + 3ab + 2b^2 + a + 2b$.
3. $x^2 - 5xy + 6y^2 + 3x - 9y$.
4. $4a^2 - 4ab + b^2 - 4a + 2b$.
5. $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + x + y + z$.
6. $x^2 - 4y^2 - 9z^2 + 12yz - 2x + 4y - 6z$.
7. $4x^2 + 9y^2 - 16z^2 - 12xy + 4x - 6y - 8z$.
8. $x(x-1)(x+2)(x-3)+8$.
9. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)-34$.
10. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-8$.
11. $x(x+1)(2x-1)(2x-3)-18$.



3.12.2008
29/6/3

3421

17. **চক্রক্রম**। a , b ও c কে কোন বৃত্তের গায়ে চিত্রাঙ্কযায়ী পর পর সাজাইয়া তীরপ্রদর্শিত দিকে a , b ও c হইতে পড়িয়া গেলে যথাক্রমে a, b, c ; b, c, a এবং c, a, b পাওয়া যায়। a, b ও c এর এই প্রকারের ক্রমকে উহাদের **চক্রক্রম** (Cyclic order) বলে।



a , b ও c অক্ষরত্রয়ের দুই দুইটির চক্রক্রমে যোগফল $b+c$, $c+a$, $a+b$, বিয়োগফল $b-c$, $c-a$, $a-b$ এবং গুণফল bc , ca , ab .

এইরূপ a, b, c ও d অক্ষর চতুষ্টয়ের দুই দুইটির চক্রক্রমে যোগফল $b+c$, $c+d$, $d+a$, $a+b$; তিন তিনটির চক্রক্রমে গুণফল bcd , cda , dab , abc .

কোন রাশিমালার পদগুলি অথবা কোন পদের উৎপাদকগুলি চক্রক্রমে সজ্জিত থাকিলে মনে রাখিবার পক্ষে বেশ সুবিধা হয়।

$$18. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\}.$$

$$\text{প্রমাণ : } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc$$

$$= (a+b+c)\{(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\} - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + 2ab - ac - bc + c^2 - 3ab)$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) + (a^2 + b^2 - 2ab)\}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\}.$$

$$\text{লক্ষ্য কর : } a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$$

$$= \frac{1}{2}\{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\}.$$

উদাহরণ 1. $x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^3 + (-2y)^3 + (-3z)^3 - 3.x(-2y)(-3z)$$

$$= \{x + (-2y) + (-3z)\}\{x^2 + (-2y)^2$$

$$+ (-3z)^2 - (-2y)(-3z) - (-3z)x - x(-2y)\}$$

$$= (x - 2y - 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6yz + 3zx + 2xy).$$

উদাহরণ 2. $x^6 + 5x^3 + 8$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= x^6 - x^3 + 8 + 6x^3 \\ &= (x^2)^3 + (-x)^3 + 2^3 - 3.x^2(-x).2 \\ &= (x^2 - x + 2)(x^4 + x^2 + 4 + 2x - 2x^2 + x^3) \\ &= (x^2 - x + 2)(x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 4).\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $(y - 2z + x)^3 + (z - 2x + y)^3 + (x - 2y + z)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$y - 2z + x$ কে a , $z - 2x + y$ কে b এবং $x - 2y + z$ কে c ধরিলে,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^3 + b^3 + c^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) + 3abc.\end{aligned}$$

এখন, $a + b + c = y - 2z + x + z - 2x + y + x - 2y + z = 0$,

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= 0 \times (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) + 3abc \\ &= 3abc = 3(y - 2z + x)(z - 2x + y)(x - 2y + z).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 19

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$.
2. $x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz$.
3. $a^3 + b^3 - 1 + 3ab$.
4. $x^3 - 8y^3 - 1 - 6xy$.
5. $8a^3 - b^3 - 27 - 18ab$.
6. $x^3 + 8y^3 - 27z^3 + 18xyz$.
7. $a^6 - 4a^3 - 1$.
8. $x^6 - 5x^3 + 8$.
9. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$. (C. U. 1929, '39 ; B. C. S. '38)
10. $x^3 + (x - 1)^3 + (1 - 2x)^3$. (D. B. 1940)
11. $(a - 2b + c)^3 + (b - 2c + a)^3 + (c - 2a + b)^3$.
12. $(x + 2y - 3z)^3 + (y + 2z - 3x)^3 + (z + 2x - 3y)^3$.

উৎপাদকের সাহায্যে ভাগ কর :

13. $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$ কে $a - b - c$ দ্বারা
14. $a^3 - 8b^3 + c^3 + 6abc$ কে $a - 2b + c$ দ্বারা
15. $x^3 - y^3 - 6xy - 8$ কে $x - y - 2$ দ্বারা
16. $x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$ কে $x - 2y - 3z$ দ্বারা
17. $8a^3 - 27b^3 + c^3 + 18abc$ কে $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 3bc - 2ca + 6ab$ দ্বারা
18. $a = y - z$, $b = z - x$, $c = x - y$ হইলে,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad (\text{C. U. 1923})$$

19. $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 2abc \quad \dots \dots (1)$
 $= a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc \quad \dots \dots (2)$
 $= bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b) + 2abc \quad \dots \dots (3)$
 $= (a + b + c)(bc + ca + ab) - abc \quad \dots \dots (4)$
 $= (b + c)(c + a)(a + b).$

$$\text{প্রমাণ : (1) } a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \\ = a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2$$

[অর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]

$$= a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

$$= (b+c)(c+a)(a+b).$$

$$(2) \quad a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc \\ = a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc^2+cb^2$$

[অর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]

$$= a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

$$= (b+c)(c+a)(a+b).$$

$$(3) \quad bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc \\ = a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$$

[অর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]

$$= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

$$= (b+c)(c+a)(a+b).$$

$$(4) \quad (a+b+c)(bc+ca+ab)-abc \\ = abc+b^2c+bc^2+ca^2+abc+c^2a+a^2b+ab^2+abc-abc \\ = a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$$

[অর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]

$$= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

$$= (b+c)(c+a)(a+b).$$

প্রশ্নমালা 20

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz.$
2. $a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a+b)-2abc.$
3. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc.$
4. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz.$
5. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc.$
6. $(x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz.$

$$\begin{aligned}
 20. \quad & a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc \quad \dots (1) \\
 & = a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) + 3abc \quad \dots (2) \\
 & = bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc \quad \dots (3) \\
 & = (b+c)(c+a)(a+b) + abc \quad \dots (4) \\
 & = (a+b+c)(bc+ca+ab).
 \end{aligned}$$

প্রমাণ : (1) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc$
 $= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 3abc$
 $= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$
 $= bc(b+c) + abc + ca(c+a) + abc + ab(a+b) + abc$
 $= bc(b+c+a) + ca(c+a+b) + ab(a+b+c)$
 $= (a+b+c)(bc+ca+ab).$

(2) $a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) + 3abc$
 $= ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 3abc$
 $= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$
 $= (a+b+c)(bc+ca+ab). [\text{পরবর্তী অংশ (1) এর দ্বারা কথিত}]$

(3) $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$
 $= (a+b+c)(bc+ca+ab). [\text{পরবর্তী অংশ (1) এর দ্বারা কথিত}]$

(4) $(b+c)(c+a)(a+b) + abc$
 $= (bc+c^2+ab+ac)(a+b) + abc$
 $= abc + c^2a + a^2b + a^2c + b^2c + c^2b + b^2a + abc + abc$
 $= b^2c + c^2b + c^2a + a^2c + a^2b + b^2a + 3abc$
 $= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$
 $= (a+b+c)(bc+ca+ab). [\text{পরবর্তী অংশ (1) এর দ্বারা কথিত}]$

প্রশ্নমালা 21

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

- $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 3xyz.$
 - $a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) + 3abc.$
 - $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 3abc.$
 - $(y+z)(z+x)(x+y) + xyz.$
 - $(b-c)(a-c)(a+b) - abc.$
 - $a+b+c=6, ab+bc+ca=11$ হইলে,
 $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$ এর মান কত ? (C.U. 1939)
21. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \quad \dots \quad (1)$
 $= -\{a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)\} \quad \dots \quad (2)$
 $= bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) \quad \dots \quad (3)$
 $= -(b-c)(c-a)(a-b).$

- প্রমাণ : (1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
 $=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
 $=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
 $[\text{এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া}]$
 $=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
 $=(b-c)(a-b)(a-c)$
 $=-(b-c)(c-a)(a-b). \quad [\because a-c=-(c-a)]$
- (2) $- \{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$
 $=-ab^2+ac^2-bc^2+ba^2-ca^2+cb^2$
 $=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
 $=-(b-c)(c-a)(a-b). \quad [(1) \text{ এর জায় কষিয়া}]$
- (3) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
 $=b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2$
 $=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
 $=-(b-c)(c-a)(a-b). \quad [(1) \text{ এর জায় কষিয়া}]$

উদাহরণ। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2).$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=(a^2)^2(b^2-c^2)+(b^2)^2(c^2-a^2)+(c^2)^2(a^2-b^2)$$

$$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$

$$=-(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b).$$

22. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

বাম পক্ষ $=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$

$$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$$

$$=(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$$

$$=\{a^2-(b^2+c^2-2bc)\}\{(2bc+b^2+c^2)-a^2\}$$

$$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$$

$$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$$

$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

প্রশ্নমালা 22

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$
2. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2).$
3. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b).$
4. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2).$

5. $a^2(b^4 - c^4) + b^2(c^4 - a^4) + c^2(a^4 - b^4)$.
6. $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$.
7. $(a^2 + 1)(b - c) + (b^2 + 1)(c - a) + (c^2 + 1)(a - b)$.
8. যদি $a = 12$, $b = 21$, $c = 9$ হয়, তবে
 $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ এর মান কত ?
9. $a + b + c = 2s$ হইলে, দেখাও যে,
 $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16s(s - a)(s - b)(s - c)$.

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক

23. উৎপাদকের সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়।

নিয়ম। প্রদত্ত রাশিসমূহের সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কসমূহ বাছিয়া লও। সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে যে উচ্চতম ঘাত রাশিগুলির সাধারণ গুণনীয়ক, তাহাদের গুণফলই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

উদাহরণ। $12ab^2x^4y^3$, $40a^2x^3y^4z$ এবং $36a^2cx^5y^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$12ab^2x^4y^3 = 2^2 \times 3 \times ab^2x^4y^3$$

$$40a^2x^3y^4z = 2^3 \times 5 \times a^2x^3y^4z$$

$$36a^2cx^5y^2 = 2^2 \times 3^2 \times a^2cx^5y^2$$

রাশিগুলির ভিতর 2, a , x এবং y এই চারটি মৌলিক গুণনীয়ক সাধারণ এবং ইহাদের যে যে উচ্চতম ঘাত রাশিগুলির সাধারণ গুণনীয়ক, তাহারা যথাক্রমে 2^2 , a , x^3 এবং y^2 . $\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2^2 \cdot a \cdot x^3 \cdot y^2 = 4ax^3y^2$.

24. গ. সা. গু. নির্ণয়ের কৌশল। প্রদত্ত রাশিগুলির যে কোনটির মৌলিক গুণনীয়কগুলি লইয়া পর্যবেক্ষণ দ্বারা গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে শ্রমের যথেষ্ট লাভ হইবে; তবে যেটিতে সবচেয়ে কম রকমের মৌলিক গুণনীয়ক থাকিবে, সেইটি লইয়া গ. সা. গু. নির্ণয় করাই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. $6ax^3yz^4$, $15bx^3y^4$ এবং $10bc^2x^2y^2z^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$6ax^3yz^4 = 2 \times 3 \times ax^3yz^4$$

$$15bx^3y^4 = 3 \times 5 \times bx^3y^4$$

$$10bc^2x^2y^2z^3 = 2 \times 5 \times bc^2x^2y^2z^3$$

দ্বিতীয় রাশিটিতে সবচেয়ে কম রকমের মৌলিক গুণনীয়ক রহিয়াছে এবং ইহাদের ভিতর x এবং y সমুদয় রাশির মৌলিক গুণনীয়ক। x এবং y এই মৌলিক গুণনীয়ক দুইটির যে যে উচ্চতম ঘাত সমুদয় রাশির ভিতর সাধারণ, তাহারা যথাক্রমে x^2 এবং y . $\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x^2 \times y = x^2y$.

প্রশ্নমালা 23

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $10x^3y^2z^4, 15x^4y^4z^3$.
2. $18a^3b^2x^4, 12a^2b^3x^5$.
3. a^3bc, b^3ca, c^3ab .
4. $2a^2x^2y^3, 3a^3xy^4, x^2y^2z^2$.
5. $24x^2y^2z^4, 9x^3y^4z^2, 12x^4y^3z^2$.
6. $16p^2q^4r, 20p^3q^3r^2s, 24p^4q^2r^3st^2$.
7. $36a^3x^4y^5, -18bx^3y^4z^2, 27abcx^3y^4z^3$.
8. $30pq^2x^3y^2z, -24a^6x^2y^4, -42p^2qr^3y^2z^2$.

25. বহুপদ রাশির গ. সা. গু. ।

দুই বা ততোধিক মিশ্রাংশিকে মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে পারিলে পূর্ব অঙ্কচ্ছেদনদ্বয়ে বর্ণিত নিয়মানুসারে তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায় ।

উদাহরণ 1. $x^2-1, x(x^2-4x+3)$ এবং x^4-1 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর ।

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

$$x(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-3)$$

$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

প্রথম রাশিতে সবচেয়ে কম, মাত্র দুই রকমের মৌলিক গুণনীয়ক রহিয়াছে ; তন্মধ্যে শুধু $x-1$ প্রদত্ত রাশিগুলির সাধারণ গুণনীয়ক ।

$$\therefore \text{নির্ণেয় গ. সা. গু.} = x-1. \quad [\text{অঙ্ক. 24 দেখ।}]$$

উদাহরণ 2. $a^2b^2(a^2-b^2), ab^3(a^2-2ab+b^2)$ এবং $b^4(a^3-b^3)$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর ।

$$a^2b^2(a^2-b^2)=a^2b^2(a+b)(a-b)$$

$$ab^3(a^2-2ab+b^2)=ab^3(a-b)^2$$

$$b^4(a^3-b^3)=b^4(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

দ্বিতীয় রাশির মৌলিক গুণনীয়ক a, b এবং $a-b$ লইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখা গেল, শুধু b^2 এবং $a-b$ প্রদত্ত রাশিগুলির সাধারণ গুণনীয়ক ।

$$\therefore \text{নির্ণেয় গ. সা. গু.} = b^2(a-b).$$

প্রশ্নমালা 24

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. a^2-1, a^2+a .
2. x^3-y^3, x^3-xy^2 .
3. x^4-x^3y, x^3y-y^4 .
4. $8(x^2-1), 12(x^3+1)$.
5. x^2-4, x^2+x-2 .
6. a^4-1, a^3-a^2+a-1 .
7. x^2+x-2, x^2-3x+2 .
8. $x^3+x^2+x+1, x^3+3x^2+3x+1$.
9. $2x^2+9x+4, 2x^2-3x-2$.

(C. U. 1928)

(C. U. 1925)

10. $3x^2 - 13x + 12, x^2 + 2x - 15.$ (C. U. 1929)
11. $x^3 - 3x^2 + x - 3, x^4 + 6x^2 + 5.$ (C. U. 1932)
12. $a^2b^3(x^2 - 10x + 16), a^3b^2(2x^2 - 7x + 6).$
13. $12(x^4 - 5x^3 + 6x^2), 16(x^3 + 2x^2 - 8x).$
14. $x^2 - 9, (x+3)^2, x^2 + x - 6.$ (C. U. 1910)
15. $x^2 - x - 2, x^3 + 1, (x+1)^2.$ (C. U. 1926)
16. $x^2 - 9, x^2 - x - 6, x^2 - 5x + 6.$
17. $x^2 - 3x + 2, 3x^2 - 2x - 8, 2x^2 - 9x + 10.$
18. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc, b^2 - c^2 - a^2 - 2ca, c^2 - a^2 - b^2 - 2ab.$

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক

26. উৎপাদকের সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়।

নিয়ম। প্রদত্ত সরল রাশিসমূহের বিভিন্ন মৌলিক গুণনীয়ক বাছিয়া লও। মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে যে উচ্চতম ঘাত রাশিগুলিতে থাকে, তাহাদের গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদাহরণ 1. $8a^3x^4, 12abx^3y^2$ এবং $18b^2y^5$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$8a^3x^4 = 2^3 \times a^3x^4$$

$$12abx^3y^2 = 2^2 \times 3 \times abx^3y^2$$

$$18b^2y^5 = 2 \times 3^2 \times b^2y^5$$

রাশিগুলির ভিতর 2, 3, a, b, x এবং y এই ছয়টি মৌলিক গুণনীয়ক রহিয়াছে এবং ইহাদের যে যে উচ্চতম ঘাত রাশিগুলিতে রহিয়াছে, তাহারা যথাক্রমে $2^3, 3^2, a^3, b^2, x^4$ এবং y^5 ; $\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2^3 \times 3^2 \times a^3b^2x^4y^5 = 72a^3b^2x^4y^5$.

27. ল. সা. গু. নির্ণয়ের কৌশল। প্রদত্ত রাশিগুলির যে কোনটিকে লইয়া ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে আরম্ভ করিলে শ্রমের যথেষ্ট লাঘব হইবে; তবে যেটিতে সবচেয়ে অধিক রকমের মৌলিক গুণনীয়ক থাকিবে, সেইটি লইয়া ল. সা. গু. নির্ণয় করাই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 2. $a^2bc^5, a^2b^3c^3d^2, c^3d^5e^4$ এবং $b^2d^2e^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় রাশিটিতে সবচেয়ে অধিক রকমের মৌলিক গুণনীয়ক রহিয়াছে; সুতরাং $a^2b^3c^3d^2$ লও। নির্ণেয় ল. সা. গু. প্রথম রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য বলিয়া c^{5-3} বা c^2 লও, তৃতীয় রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য বলিয়া $d^{5-2}e^4$ বা d^3e^4 লও এবং চতুর্থ রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য বলিয়া আর কিছুই লওয়ার প্রয়োজন নাই। গৃহীত রাশি তিনটির গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

$$\therefore \text{নির্ণেয় ল. সা. গু.} = a^2b^3c^3d^2 \times c^2 \times d^3e^4 = a^2b^3c^5d^5e^4.$$

প্রশ্নমালা 25

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $4ab^3, 6a^2b$.
2. $9a^2xy^3, 12ax^3y^2$.
3. $10a^2b^3c^4, 15a^4b^2c^3$.
4. $12a^2b^3x^3y^4, 16a^3b^2x^4y^3$.
5. $a^3b^2c, b^3c^2a, c^3a^2b$.
6. $4abxy, 6bcyz, 8acxz$.
7. $10a^2b^2x^4y, 15bc^3x^3y^2, 20c^4xy^4$.
8. $12ab^2x^3y^4, 18b^2c^3y^4z, 24cdz^4x^2$.

28. বহুপদ রাশির ল. সা. গু.।

দুই বা ততোধিক মিশ্ররাশিকে মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে পারিলে পূর্ব অঙ্কচ্ছেদদ্বয়ে বর্ণিত নিয়মামুসারে তাহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ। $x^2y^2(x^2-1)$, $x(x^2+2x+1)$ এবং $y(x^2-2x+1)$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$x^2y^2(x^2-1) = x^2y^2(x+1)(x-1)$$

$$x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$$

$$y(x^2-2x+1) = y(x-1)^2$$

প্রথম নিয়মে : রাশিগুলির ভিতর x , y , $x+1$ এবং $x-1$ এই চারটি মৌলিক গুণনীয়ক রহিয়াছে, এবং উহাদের যে যে উচ্চতম ঘাত রাশিগুলিতে রহিয়াছে, তাহার যথাক্রমে x^2 , y^2 , $(x+1)^2$ এবং $(x-1)^2$.

$$\therefore \text{নির্ণেয় ল. সা. গু.} = x^2y^2(x+1)^2(x-1)^2$$

দ্বিতীয় নিয়মে : প্রথম রাশিতে সবচেয়ে অধিক রকমের মৌলিক গুণনীয়ক রহিয়াছে ; সুতরাং প্রথম রাশিটির সমুদয় গুণনীয়ক লও। নির্ণেয় ল. সা. গু. দ্বিতীয় রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য বলিয়া আরও একটি $x+1$ লও এবং তৃতীয় রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য বলিয়া আরও একটি $x-1$ লও।

$$\therefore \text{নির্ণেয় ল. সা. গু.} = x^2y^2(x+1)(x-1)(x+1)(x-1) \\ = x^2y^2(x+1)^2(x-1)^2$$

প্রশ্নমালা 26

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a^2, a(a-1)$.
2. $4x^2, 6x(x-y)$.
3. a^2-1, a^2+2a+1 .
4. $9x^2y-y, 6x^2+2x$.
5. x^2-x-6, x^2-4x+3 . (C. U. 1925)
6. $3x^2-10x+8, 2x^2-3x-2$. (C. U. 1931)
7. $x^2-(a-c)x-ac, x^2-(a+c)x+ac$. (C. U. 1918)
8. $x^2(x^2-4), x^4+2x^3-8x^2$. (C. U. 1952)
9. $4a^2(a+b)^2, 6ab(a^2-b^2), 8b^2(a-b)^3$.

10. $1+a, 1-a^2, 1-2a+a^2$. (C. U. 1924)
11. x^2-4, x^2-x-2, x^2+x-2 . (C. U. 1910)
12. $a^2-3a+2, (a-1)^2, a^4-1$. (C. U. 1938)
13. $x^2-3x+2, x^2-4x+3, x^2-5x+6$. (C. U. 1922)
14. $a^2-ab-6b^2, a^2-9b^2, a^2+ab-12b^2$. (C. U. 1911)
15. $1+a+b+ab, 1+b+c+bc, 1+c+a+ca$.
16. $a^2+ab+ac+bc, b^2+ab+bc+ac, c^2+ac+bc+ab$.
17. $x^2-(a+b)x+ab, x^2-(b+c)x+bc, x^2-(c+a)x+ca$.
18. $a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4$. (C. U. 1915)
19. $x^2-3x+2, x^3-4x, x^4+x^3-6x^2$. (C. U. 1936)
20. $2x^2-x-1, 2x^2+3x+1, x^2-1$. (C. U. 1912)
21. $6x^2-x-1, 3x^2+7x+2, 2x^2+3x-2$. (C. U. 1926)
22. $a^2-b^2-c^2+2bc, (a+b-c)^2, a^2+c^2-b^2+2ac$. (C. U. 1940)

29. দুইটি বহুপদ রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী।

A এবং B যেন এমন দুইটি বহুপদ রাশি যাহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষর হিসাবে Bর মান (Degree), Aর মান অপেক্ষা উচ্চতর নহে।

B দ্বারা A কে ভাগ কর, ভাগফল যেন Q_1 এবং ভাগশেষ C হইল।

B) A (Q_1

C দ্বারা B কে ভাগ কর ; ভাগফল যেন Q_2 এবং ভাগশেষ D হইল।

BQ_1

C) B (Q_2

D দ্বারা C কে ভাগ কর ; ভাগফল যেন Q_3 হইল এবং ভাগশেষ রহিল না।

CQ_2

D) C (Q_3

DQ_3

তাহা হইলে, ভাগের নিয়মামুযায়ী,

$$A = BQ_1 + C, B = CQ_2 + D \text{ এবং } C = DQ_3.$$

এখন আমরা প্রমাণ করিব যে, (1) A এবং Bর সাধারণ গুণনীয়ক D এবং (2) Dই উহাদের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক।

(1) $\therefore C = DQ_3, \therefore$ Cর একটি গুণনীয়ক D.

$\therefore$ Cর একটি গুণনীয়ক D এবং $B = CQ_2 + D$;

$\therefore$ Bর একটি গুণনীয়ক D.

আবার, $\therefore$ Bর এবং Cর একটি সাধারণ গুণনীয়ক D এবং $A = BQ_1 + C$;

$\therefore$ Aর একটি গুণনীয়ক D.

$\therefore$ A এবং Bর সাধারণ গুণনীয়ক D.

(2) A এবং Bর সাধারণ গুণনীয়ক D যদি উহাদের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গ. সা. গু. না হয়, তবে মনে কর যেন E উহাদের গ. সা. গু.। তাহা হইলে E স্পষ্টতঃই D অপেক্ষা উচ্চতর মানের কোন রাশি হইবে।

$$\therefore A = BQ_1 + C, \therefore A - BQ_1 = C.$$

$$\therefore B = CQ_2 + D, \therefore B - CQ_2 = D.$$

এখন, যেহেতু A এবং Bর গ. সা. গু. E, $\therefore$ A এবং B, E দ্বারা বিভাজ্য ;

$\therefore$ A - BQ₁ বা C, E দ্বারা বিভাজ্য।

আবার, যেহেতু B এবং C, E দ্বারা বিভাজ্য ;

$\therefore$ B - CQ₂ বা D, E দ্বারা বিভাজ্য।

কিন্তু D উহা অপেক্ষা উচ্চতর মানের রাশি E দ্বারা বিভাজ্য হওয়া অসম্ভব।
সুতরাং Dই উহাদের গ. সা. গু.।

ইহা হইতে দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিম্নোক্ত নিয়মটি পাওয়া গেল :

নিয়ম। (1) উভয় রাশিকে উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাত-সমূহের অধঃক্রমে (বা উর্ধ্বক্রমে) সাজাও। রাশিদ্বয়ের একটিতে বা উভয়ে একপদ গুণনীয়ক থাকিলে প্রথমেই উহাদিগকে পৃথক্ করিয়া রাখিয়া দিবে।

(2) উচ্চতর মানের রাশিটিকে অপরটি দ্বারা ভাগ কর। উভয়ের মান সমান হইলে যেটির প্রথম পদের সহগ বৃহত্তর, তাহাকে অপরটি দ্বারা ভাগ করিবে।

(3) যদি কোন ভাগশেষ থাকে, তবে পাটীগণিতের ন্যায় ঐ ভাগশেষকে নূতন ভাজক এবং পূর্বের ভাজককে ভাজ্যরূপে লইয়া আবার ভাগ কর। যে পর্যন্ত ভাগশেষ 0 না হয়, এইরূপে কার্য করিতে থাক। সর্বশেষ ভাজকটিই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। কিন্তু যদি উভয় রাশির একপদ গুণনীয়ক প্রথমেই পৃথক্ করিয়া রাখা হইয়া থাকে, তবে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা সর্বশেষ ভাজকটিকে গুণ করিলে নির্ণেয় গ. সা. গু. পাওয়া যাইবে।

(4) উল্লিখিতরূপ কার্যকালে যে কোন অবস্থাতে ভাজ্য এবং তৎসংশ্লিষ্ট ভাজকের যে কোনটিকে, অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ রাশি দ্বারা প্রয়োজনমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে। ভাগের সময় যাহাতে ভগ্নাংশ সহগ না আসে, তজ্জন্ম এই প্রক্রিয়ার বিশেষ প্রয়োজন হয়।

উদাহরণ 1. $x^3+5x^2+10x+12$ এবং $x^3+6x^2+14x+15$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r}
 x^3+5x^2+10x+12 \quad x^3+6x^2+14x+15 \quad (1 \\
 \underline{x^3+5x^2+10x+12} \\
 x^2+4x+3 \quad 3) \quad x^3+5x^2+10x+12(x+1 \\
 \underline{x^3+4x^2+3x} \\
 x^2+7x+12 \\
 \underline{x^2+4x+3} \\
 3x+9 \\
 3) \quad 3x+9 \\
 \underline{x+3} \\
 x^2+4x+3 \quad (x+1 \\
 \underline{x^2+3x} \\
 x+3 \\
 \underline{x+3}
 \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. = $x+3$.

$$\begin{array}{r}
 5) 5x^2 + 15x + 5 \\
 \underline{x^2 + 3x + 1} \quad 2x^3 + 7x^2 + 5x + 1(2x + 1 \\
 \quad \underline{2x^3 + 6x^2 + 2x} \\
 \quad \quad \underline{x^2 + 3x + 1} \\
 \quad \quad \quad \underline{x^2 + 3x + 1}
 \end{array}$$

∴ অপর গুণনীয়ক দুইটির গ. সা. গু. = $x^2 + 3x + 1$.

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. = $2x(x^2 + 3x + 1)$.

মন্তব্য। এখানে দ্বিতীয় ভাগে ভাগকার্য শেষ হওয়ার পূর্বে 2 দ্বারা পর পর দুই বার গুণ করা হইয়াছে [নিয়ম (4)]।

প্রশ্নমালা 27

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $x^2 - 2x - 3$ এবং $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$. (C. U. 1915)
2. $3x^2 - 11x - 4$ এবং $6x^3 - 25x^2 + 3$. (C. U. 1916)
3. $2x^2 + 18x + 28$ এবং $x^3 + 10x^2 + 24x + 16$. (C. U. 1938)
4. $2x^2 - x - 1$ এবং $3x^3 - 7x^2 + 4$. (C. U. 1945)
5. $x^3 + 4x^2 - 5$ এবং $x^3 - 3x + 2$. (C. U. 1918)
6. $x^3 - 7x + 6$ এবং $x^3 - 3x^2 + 4$. (C. U. 1917)
7. $x^3 - 3x - 2$ এবং $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$. (C. U. 1924)
8. $x^3 - 5x - 2$ এবং $2x^3 - 5x^2 + 1$. (C. U. 1933)
9. $2x^3 + x^2 - 5x - 3$ এবং $8x^3 + 6x^2 - 21x - 18$. (C. U. 1913)
10. $2x^3 - 3x^2 - 17x - 12$ এবং $3x^3 - 7x^2 - 18x - 8$. (C. U. 1937)
11. $x^3 - 3x^2 + x - 3$ এবং $x^4 + 6x^2 + 5$. (C. U. 1932)
12. $x^3 - 7x + 6$ এবং $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$. (Pat. U. 1928)
13. $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15$ এবং $4x^3 + 8x^2 + 3x + 20$. (C. U. 1867)
14. $x^4 + x^3 - 2x$ এবং $2x^5 + 4x^4 - 6x^2$.
15. $4x^4 + 4x^3 - 8x$ এবং $6x^5 + 12x^4 - 18x^2$.
16. $x^4 - 5x^2 + 4$ এবং $x^5 - 11x + 10$. (D. U. 1932)
17. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 11x + 10$ এবং $x^5 + 2x^3 + 5x^2 - 3x - 5$. (C. U. 1934)
18. $a^5 + 11a - 12$ এবং $a^5 + 11a^3 + 54$. (C. U. 1949)

30. তিন বা ততোধিক রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী।

A, B ও C যে কোন তিনটি রাশি; উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, A ও Bর গ. সা. গু. G এবং G ও Cর গ. সা. গু. H; তাহা হইলে A, B ও Cর গ. সা. গু. H হইবে। কারণ,

A ও Bর সমুদয় সাধারণ গুণনীয়ক Gরও গুণনীয়ক ;

আবার, G ও Cর সমুদয় সাধারণ গুণনীয়ক Hএরও গুণনীয়ক ;

∴ A, B ও Cর সমুদয় সাধারণ গুণনীয়ক Hএরও গুণনীয়ক ।

∴ A, B ও Cর গ. সা. গু. H হইবে ।

এইরূপ D যদি চতুর্থ একটি রাশি হয়, তবে H ও Dর গ. সা. গু.ই A, B, C ও Dর গ. সা. গু. হইবে । সুতরাং নিম্নোক্ত নিয়মটি পাওয়া গেল :

নিয়ম। A, B, C, D প্রভৃতি কতকগুলি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে,

A ও Bর গ. সা. গু. নির্ণয় কর, ধর যেন X হইল ;

X ও Cর গ. সা. গু. নির্ণয় কর, ধর যেন Y হইল ;

Y ও Dর গ. সা. গু. নির্ণয় কর, ধর যেন Z হইল ; ইত্যাদি ।

সর্বশেষ গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে ।

উদাহরণ। $2x^3+9x^2+10x+3$, $3x^3+13x^2+13x+3$

এবং $2x^3+3x^2-8x+3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর ।

প্রথমে প্রথম রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া লও । গ. সা. গু. x^2+4x+3 হইল । এখন, x^2+4x+3 এবং তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় কর । গ. সা. গু. $x+3$ হইল । ∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+3$ ।

প্রশ্নমালা 28

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. x^2+3x+2 , x^2+4x+3 এবং x^2+5x+4 .

2. $2x^2+3x+1$, $2x^2-3x-2$ এবং $2x^2+7x+3$.

3. x^3-2x+1 , x^3-5x+4 এবং x^3+2x-3 .

4. x^3-3x^2+4 , $2x^3-x^2+3$ এবং $3x^3+x+4$.

5. $2x^3+7x^2-9$, $3x^3+5x^2-11x+3$ এবং x^3-8x+3 .

31. গ. সা. গু. এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় ।

সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, এরূপ রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় ।

মনে কর, A এবং B দুইটি রাশি এবং H উহাদের গ. সা. গু. । A এবং B কে H দ্বারা ভাগ কর, ভাগফল যেন যথাক্রমে a এবং b হইল । তাহা হইলে,

$$A=aH \text{ এবং } B=bH .$$

এখন যেহেতু a এবং bর কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিতে পারে না ;

$$\therefore A \text{ এবং } B \text{র ল. সা. গু.} = aHb = \frac{aH \times bH}{H} = \frac{A \times B}{H}$$

$$= \frac{A}{H} \times B, \text{ বা } a = A \times \frac{B}{H} . \text{ অতএব নিয়ম হইল :}$$

নিয়ম। দুইটি রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের গুণফলকে গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিবে, অথবা একটিকে গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া প্রাপ্ত ভাগফল দ্বারা অপরটিকে গুণ করিবে। শেষোক্ত প্রক্রিয়াই সুবিধাজনক।

অনুসিদ্ধান্ত। $\therefore$ A এবং Bর গ. সা. গু. = H হইলে, ল. সা. গু. = $\frac{A \times B}{H}$;

$\therefore$ A এবং Bর গ. সা. গু. $\times$ ল. সা. গু. = $H \times \frac{A \times B}{H} = A \times B$;

$\therefore$ দুইটি রাশির গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.র গুণফল উক্ত রাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান। সুতরাং পাটীগণিতের ত্রায় নিয়ম হইল :

নিয়ম। দুইটি রাশির গুণফলকে গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে ল. সা. গু. এবং ল. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে গ. সা. গু. পাওয়া যায়।

মন্তব্য। দুইটি রাশির কোন সাধারণ গুণনীয়ক না থাকিলে, পাটীগণিতের ত্রায় রাশিদ্বয়ের গুণফলই উহাদের ল. সা. গু.।

উদাহরণ। $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ এবং $2x^3 - 7x^2 - 14x - 5$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় কর। গ. সা. গু. $2x^2 + 3x + 1$ হইল।

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. = $\frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 2}{2x^2 + 3x + 1} (2x^3 - 7x^2 - 14x - 5)$
 $= (x + 2)(2x^3 - 7x^2 - 14x - 5) = 2x^4 - 3x^3 - 28x^2 - 33x - 10.$

প্রশ্নমালা 29

গ. সা. গু. এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $x^2 + 5x + 6$ এবং $x^2 + 6x + 8.$

2. $x^3 - x - 6$ এবং $2x^3 + x^2 - 9.$

3. $x^3 - 7x - 6$ এবং $3x^3 + 7x^2 - 4.$

4. $4x^3 - 7x - 3$ এবং $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1.$

(C. U. 1950)

32. তিন বা ততোধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়।

A, B ও C যেন তিনটি রাশি ; উহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, A ও Bর ল. সা. গু. L এবং L ও Cর ল. সা. গু. M. তাহা হইলে, A, B ও Cর ল. সা. গু. M হইবে।

$\therefore$ A এবং Bর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক = L ;

$\therefore$ A এবং Bর যে কোন সাধারণ গুণিতক, L এর গুণিতক ;

$\therefore$ A, B এবং Cর যে কোন সাধারণ গুণিতক, L এবং Cর সাধারণ গুণিতক ;

$\therefore$ A, B এবং Cর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল. সা. গু.

= L এবং Cর ল. সা. গু. = M.

এইরূপ, D যদি চতুর্থ একটি রাশি হয়, তবে M ও Dর ল. সা. গু. A, B, C ও Dর ল. সা. গু. হইবে।

সুতরাং নিম্নোক্ত নিয়মটি পাওয়া গেল :

নিয়ম। A, B, C, D প্রভৃতি কতকগুলি রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, A ও Bর ল. সা. গু. নির্ণয় কর, ধর যেন X হইল ; X ও Cর ল. সা. গু. নির্ণয় কর, ধর যেন Y হইল ; Y ও Dর ল. সা. গু. নির্ণয় কর, ধর যেন Z হইল ; ইত্যাদি।

সর্বশেষ ল. সা. গু.ই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদাহরণ। গ. সা. গু. এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$$2x^2 - 5x - 3, 2x^2 + 5x + 2 \text{ এবং } 4x^3 + 16x^2 + 19x + 6.$$

প্রদত্ত প্রথম রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় কর। গ. সা. গু. $2x + 1$ হইল।

$$\begin{aligned} \therefore \text{উহাদের ল. সা. গু.} &= \frac{2x^2 - 5x - 3}{2x + 1} (2x^2 + 5x + 2) \\ &= (x - 3)(2x^2 + 5x + 2) \\ &= 2x^3 - x^2 - 13x - 6. \end{aligned}$$

এখন, $2x^3 - x^2 - 13x - 6$ এবং $4x^3 + 16x^2 + 19x + 6$ এর ল. সা. গু. নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে। সুতরাং এই রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া লও।
গ. সা. গু. $2x^2 + 5x + 2$ হইল।

$$\begin{aligned} \therefore \text{নির্ণেয় ল. সা. গু.} &= \frac{2x^3 - x^2 - 13x - 6}{2x^2 + 5x + 2} (4x^3 + 16x^2 + 19x + 6) \\ &= (x - 3)(4x^3 + 16x^2 + 19x + 6) \\ &= 4x^4 + 4x^3 - 29x^2 - 51x - 18. \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 30

গ. সা. গু. এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $x^2 - x - 6, x^2 + x - 12$ এবং $x^2 + 6x + 8$. (C. U. 1921)
2. $6x^2 - x - 1, 3x^2 + 7x + 2$ এবং $2x^2 + 3x - 2$. (C. U. 1926)
3. $2x^2 - 5x - 3, 3x^2 - 8x - 3$ এবং $6x^2 + 5x + 1$.

33. গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. ঘটিত বিবিধ প্রশ্ন।

উদাহরণ 1. দ্বিতীয় মানের দুইটি রাশির ল. সা. গু. $x^3 - 13x - 12$ এবং গ. সা. গু. $x + 1$; রাশি দুইটি কত ?

$$\begin{aligned} \text{রাশি দুইটির গুণফল} &= (x^3 - 13x - 12)(x + 1) \\ &= (x^3 + x^2 - x^2 - x - 12x - 12)(x + 1) \\ &= \{x^2(x + 1) - x(x + 1) - 12(x + 1)\}(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x - 12)(x + 1) \\ &= (x + 1)(x - 4)(x + 3)(x + 1). \end{aligned}$$

এখন, নির্ণয় রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $x+1$ বলিয়া উভয় রাশিরই একটি উৎপাদক $x+1$ হইবে। সুতরাং উহারা দ্বিতীয় মানের রাশি বলিয়া, রাশিদ্বয়

$$(x+1)(x-4) \text{ এবং } (x+3)(x+1) \text{ বা } x^2-3x-4 \text{ এবং } x^2+4x+3.$$

উদাহরণ ২. দুইটি রাশি x এবং y এর গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l . যদি $h+l=x+y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $h^2+l^2=x^2+y^2$.

∴ দুইটি রাশির গ. সা. গু. $\times$ ল. সা. গু. = রাশি দুইটির গুণফল ;

$$\therefore hl = xy \text{ এবং সর্তাসারে } h+l = x+y ;$$

$$\begin{aligned} \therefore h^2+l^2 &= (h+l)^2 - 2hl \\ &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= x^2+y^2. \end{aligned}$$

উদাহরণ ৩. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. $x+a$ হইলে, দেখাও যে, $(p-p')a = q-q'$. (C. U. 1941)

x^2+px+q কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে একটি উৎপাদক $x+a$ হইবে। সুতরাং x এর মান $-a$ ধরিলে $x+a$ এর মান শূন্য হইবে বলিয়া x^2+px+q এর মানও শূন্য হইবে।

$$\begin{aligned} \therefore (-a)^2 + p(-a) + q &= 0, \\ \text{বা } a^2 - pa + q &= 0 \\ \text{এইরূপ, } a^2 - p'a + q' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{বিয়োগ করিয়া, } -pa + p'a + q - q' &= 0, \\ \text{বা } -(p-p')a &= -(q-q') \\ \therefore (p-p')a &= q-q'. \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 31

1. প্রমাণ কর যে, দুইটি বীজগণিতীয় রাশির গুণফল উহাদের গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. এর গুণফলের সমান। (D. B. 1944)

2. দুইটি রাশির গ. সা. গু. $x-7$ এবং ল. সা. গু. $x^3-10x^2+11x+70$; উহাদের একটি $x^2-5x-14$ হইলে অপরটি কত? (A. U. 1925)

3. দ্বিতীয় মানের দুইটি রাশির ল. সা. গু. x^3-7x+6 এবং গ. সা. গু. $x-1$; রাশি দুইটি নির্ণয় কর। (D. B. 1927)

4. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. $x+a$ হইলে, দেখাও যে, $a = \frac{q-q'}{p-p'}$.

5. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. $x-a$ হইলে, দেখাও যে, $a = \frac{q-q'}{p'-p}$.

6. x এবং y দুইটি বীজগণিতীয় রাশি। উহাদের গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l , যদি $h+l=x+y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
 $h^3+l^3=x^3+y^3.$ (P. U. 1861)

ভগ্নাংশ

34. a কে b দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল হয় $a \div b$, বা $\frac{a}{b}$; এই শেষোক্ত আকারে প্রকাশিত ভাগফলকে বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ (Fraction) বলে।

35. ভগ্নাংশের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম। ভগ্নাংশের লব ভাজ্য এবং হর ভাজক বলিয়া ভাগের এবং ভগ্নাংশের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম একই। যেমন,

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \quad \text{অর্থাৎ লব ও হরের চিহ্ন}$$

সদৃশ হইলে ভগ্নাংশটির চিহ্ন '+' এবং অসদৃশ হইলে চিহ্ন '-' হইবে।

দ্রষ্টব্য। কোন ভগ্নাংশের পূর্বে - চিহ্ন থাকিলে উহাকে ভগ্নাংশটির লবের পূর্বে অথবা হরের পূর্বে ধরা চলে।

36. ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন।

কোনও ভগ্নাংশের যে আকারে উহার লব ও হরের কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকে না, সেই আকারকে ভগ্নাংশটির লঘিষ্ঠ আকার বলে। সুতরাং কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিতে হইলে লব ও হরের গ. সা. গু. দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করিতে হয়। ইহাতে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন ঘটে না অথচ উহা লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত হয়।

মন্তব্য। কোন ভগ্নাংশের লব ও হরকে মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া লব ও হরের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ (cancelling) করিলেও ভগ্নাংশটি লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত হইবে। লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন করাকে স্থলবিশেষে সরল করা বলে।

$$\text{দ্রষ্টব্য। } \frac{a}{b} = \frac{a \times (-1)}{b \times (-1)} = \frac{-a}{-b} \text{ এবং } \frac{-a}{-b} = \frac{-a \times (-1)}{b \times (-1)} = \frac{a}{-b};$$

∴ কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়ের চিহ্ন পরিবর্তন করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন ঘটে না।

$$\text{উদাহরণ 1. } \frac{6a^3b^3c^4}{9a^2b^4c^5} \text{ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।}$$

$$\frac{6a^3b^3c^4}{9a^2b^4c^5} = \frac{2 \times 3 \times a^3 \times b^3 \times c^4}{3 \times 3 \times a^2 \times b^4 \times c^5} = \frac{2a}{3bc}$$

$$\text{উদাহরণ 2. } \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3} \text{ কে লঘিষ্ঠ আকারে আনয়ন কর।}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{a-b}{a^2 - ab + b^2}$$

প্রশ্নমালা 32

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর (Reduce to lowest terms) :

1. $\frac{4a^3x^4}{6a^2x^5}$
2. $\frac{6a^3xy^2}{12a^4x^3y^4}$
3. $\frac{-28a^3x^4y^3}{21a^4x^5y^2}$
4. $\frac{16ab^3x^4y^2}{-40b^5x^2y^4}$
5. $\frac{a^3-b^3}{a^3-ab^2}$
6. $\frac{a^2-2a}{4a-a^3}$
7. $\frac{2x+4y}{x^2-4y^2}$
8. $\frac{2b^2-8a^2}{12a^2-3b^2}$
9. $\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$
10. $\frac{1-5a+6a^2}{1-7a+12a^2}$
11. $\frac{1-7x+10x^2}{1+4x-12x^2}$
12. $\frac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}$
13. $\frac{x^3+y^3}{x^4-x^3y+x^2y^2}$
14. $\frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$
15. $\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-10x-8}$
16. $\frac{2x^2-9xy+9y^2}{3x^2-8xy-3y^2}$
17. $\frac{10-23a+12a^2}{15-32a+16a^2}$
18. $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$
19. $\frac{x^2+(a-b)x-ab}{x^2-(a+b)x+ab}$
20. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2-2bc}$

37. দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করা।

নিয়ম। সম্ভবস্থলে ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিয়া প্রাপ্ত হরগুলির ল.সা.গু. নির্ণয় কর এবং লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত ভগ্নাংশগুলির হর দ্বারা ল.সা.গু. কে ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাহা দ্বারা উহার লব ও হরকে গুণ কর।

কাজেই লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিবার বীজগণিতীয় নিয়ম পাটীগণিতেরই হয়।

উদাহরণ। $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a-b}$ এবং $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

ভগ্নাংশগুলির হরগুলি যথাক্রমে $a+b$, $a-b$ এবং a^2-b^2 এবং ইহাদের ল.সা.গু. $= a^2-b^2$; এই ল.সা.গু. কে হরগুলি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি যথাক্রমে $a-b$, $a+b$ এবং 1 হয়।

$$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a(a-b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{b}{a-b} = \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{b(a+b)}{a^2-b^2}$$

এবং $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a^2+b^2) \times 1}{(a^2-b^2) \times 1} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

প্রশ্নমালা 33

লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত কর :

1. $\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4}$
2. $\frac{3}{ab}, \frac{4}{bc}, \frac{5}{ca}$
3. $\frac{a^2}{yz}, \frac{b^2}{zx}, \frac{c^2}{xy}$
4. $\frac{x+y}{ab}, \frac{y+z}{bc}, \frac{z+x}{ca}$
5. $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}, 2ab$
6. $\frac{1}{a-b}, \frac{2a}{ab-a^2}, \frac{3ab}{a^2-b^2}$

33. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ।

ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগের নিয়ম দেওয়া গেল :

নিয়ম। সাধারণ হরবিশিষ্ট দুইটি ভগ্নাংশ যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকিলে, ভগ্নাংশ দুইটির লবের বীজগণিতীয় যোগফলকে বা বিয়োগফলকে লব এবং সাধারণ হরটিকে হর ধরিলে যথাক্রমে যোগফল বা বিয়োগফল পাওয়া যায়।

কাজেই ভগ্নাংশগুলি যদি সাধারণ হরবিশিষ্ট না থাকে, তবে তাহাদিগকে প্রথমেই সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লইবে। লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লওয়াই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. $\frac{x}{x-y}$ এবং $\frac{y}{y-x}$ যোগ কর।

$$\frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x} = \frac{x}{x-y} + \frac{-y}{x-y} = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1.$$

উদাহরণ 2. $\frac{a}{a-b}$ হইতে $\frac{b}{a+b}$ বিয়োগ কর।

এখানে ভগ্নাংশ দুইটিকে প্রথমেই লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লও।

হরগুলির ল. সা. গু. = $(a-b)(a+b)$;

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} &= \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)} \quad \dots (A) \\ &= \frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

মন্তব্য। কার্যতঃ (A) চিহ্নিত পংক্তির ডান পার্শ্ব পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও দেখান হয় না।

উদাহরণ 3. সরল কর : $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a} + \frac{4ax}{a^2-x^2}$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a} - \frac{4ax}{x^2-a^2} \\ &= \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2 - 4ax}{x^2-a^2} \\ &= \frac{x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2 - 4ax}{x^2-a^2} \\ &= \frac{0}{x^2-a^2} = 0. \end{aligned}$$

উদাহরণ 4. সরল কর: $\frac{1}{x+y} - \frac{2}{2x+y} + \frac{1}{x-y} - \frac{2}{2x-y}$

এখানে প্রথম ও তৃতীয় পদ এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদ একত্র লইয়া কার্য আরম্ভ কর।

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} &= \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) - \left(\frac{2}{2x+y} + \frac{2}{2x-y} \right) \\ &= \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{8x}{4x^2-y^2} \\ &= \frac{8x^3-2xy^2-8x^3+8xy^2}{(x^2-y^2)(4x^2-y^2)} \\ &= \frac{6xy^2}{4x^4-5x^2y^2+y^4}\end{aligned}$$

উদাহরণ 5. সরল কর: $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} - \frac{2a}{x^2+a^2} - \frac{4a^3}{x^4+a^4}$

এখানে $x-a$ ও $x+a$ এর ল.সা.গু. x^2-a^2 , x^2-a^2 ও x^2+a^2 এর ল.সা.গু. x^4-a^4 এবং x^4-a^4 ও x^4+a^4 এর ল.সা.গু. x^8-a^8 ; সুতরাং প্রথম পদের সহিত একটি একটি করিয়া পদ ক্রমশঃ যোগ কর।

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} &= \frac{x+a-x-a}{x^2-a^2} = \frac{2a}{x^2-a^2}, \\ \frac{2a}{x^2-a^2} - \frac{2a}{x^2+a^2} &= \frac{2a(x^2+a^2-x^2+a^2)}{x^4-a^4} = \frac{4a^3}{x^4-a^4} \\ \text{এবং } \frac{4a^3}{x^4-a^4} - \frac{4a^3}{x^4+a^4} &= \frac{4a^3(x^4+a^4-x^4-a^4)}{x^8-a^8} = \frac{8a^7}{x^8-a^8}\end{aligned}$$

উদাহরণ 6. সরল কর: $\frac{1}{x+a} + \frac{2x}{x^2+a^2} + \frac{4x^3}{x^4+a^4} - \frac{8x^7}{x^8-a^8}$

প্রদত্ত রাশি = $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} + \frac{2x}{x^2+a^2} + \frac{4x^3}{x^4+a^4} - \frac{8x^7}{x^8-a^8} - \frac{1}{x-a}$

$$\begin{aligned}\text{এখন, } \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} &= \frac{x+a+x-a}{x^2-a^2} = \frac{2x}{x^2-a^2}, \\ \frac{2x}{x^2-a^2} + \frac{2x}{x^2+a^2} &= \frac{2x(x^2+a^2+x^2-a^2)}{x^4-a^4} = \frac{4x^3}{x^4-a^4}, \\ \frac{4x^3}{x^4-a^4} + \frac{4x^3}{x^4+a^4} &= \frac{4x^3(x^4+a^4+x^4-a^4)}{x^8-a^8} = \frac{8x^7}{x^8-a^8},\end{aligned}$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{8x^7}{x^8-a^8} - \frac{8x^7}{x^8-a^8} - \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{x-a} = \frac{1}{a-x}$$

উদাহরণ 7. সরল কর:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2} \quad (\text{C. U. 1937})$$

প্রদত্ত রাশি

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+c+b)(a+c-b)} + \frac{(b+c-a)(b-c+a)}{(a+b+c)(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b+c-a)} \\
&= \frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{-a+b+c}{a+b+c} + \frac{a-b+c}{a+b+c} \\
&= \frac{a+b-c-a+b+c+a-b+c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.
\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 34

সরল কর :

1. $\frac{a-b}{a+b}$ এবং $\frac{a+b}{a-b}$ যোগ কর।
2. $\frac{x+y}{x-y}$ হইতে $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ বিয়োগ কর।
3. $\frac{1-x}{1-x+x^2}$ হইতে $-\frac{1}{1+x}$ বিয়োগ কর।
4. $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} - \frac{2x}{x^2-y^2}$
5. $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} - \frac{4xy}{x^2-y^2}$
6. $\frac{x+y}{y} - \frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{y(x+y)}$
7. $\frac{x^2}{ab} + \frac{(x-a)^2}{a(a-b)} - \frac{(x-b)^2}{b(a-b)}$
8. $\frac{2}{a-1} - \frac{a}{a^2+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^2-1}$
9. $\frac{a-1}{a-2} - \frac{a+1}{a+2} - \frac{4}{4-a^2} + \frac{2}{2-a}$ (D. B. 1945)
10. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4-1}$
11. $\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} - \frac{8}{1-a^8}$
12. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{8x^7}{x^8+1}$ (C. U. 1950)
13. $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{(x-3)(x-1)}$
14. $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{x-1}{2x^2+5x+2} - \frac{x}{2x^2+3x+1}$ (M. U. 1886)
15. $\frac{1}{a^2+ax+x^2} - \frac{1}{a^2-ax+x^2} + \frac{2ax}{a^4+a^2x^2+x^4}$
16. $\frac{x-y}{(a+x)(a+y)} + \frac{y-z}{(a+y)(a+z)} + \frac{z-x}{(a+z)(a+x)}$ (A. U. 1915)

$$17. \frac{(a-c)^2 - b^2}{a^2 - (b+c)^2} + \frac{(b-a)^2 - c^2}{b^2 - (c+a)^2} + \frac{(c-b)^2 - a^2}{c^2 - (a+b)^2}. \quad (\text{C. U. 1935})$$

$$18. \frac{b-c}{a^2 - (b-c)^2} + \frac{c-a}{b^2 - (c-a)^2} + \frac{a-b}{c^2 - (a-b)^2}. \quad (\text{C. U. 1914})$$

39. চক্র-ক্রমিক ভগ্নাংশ।

যে সকল ভগ্নাংশের অক্ষরগুলি চক্র-ক্রমে (in cyclic order) থাকে, তাহাদিগকে অতি সহজে সরল করা যায়।

উদাহরণ 1. সরল কর : $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

হরের গুণনীয়কগুলিকে $a-b$, $b-c$, $c-a$ এইরূপ চক্র-ক্রমে আনিয়া লও।

$$\therefore \frac{1}{(a-b)(a-c)} = -\frac{1}{(a-b)(c-a)}, [\because a-c = -c+a = -(c-a)]$$

অনুরূপে, $\frac{1}{(b-c)(b-a)} = -\frac{1}{(b-c)(a-b)}$, $\frac{1}{(c-a)(c-b)} = -\frac{1}{(c-a)(b-c)}$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = -\left\{ \frac{1}{(a-b)(c-a)} + \frac{1}{(b-c)(a-b)} + \frac{1}{(c-a)(b-c)} \right\}$$

$$= -\frac{(b-c) + (c-a) + (a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

হরের গুণনীয়কগুলিকে চক্র-ক্রমে আনিলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = -\left\{ \frac{a}{(a-b)(c-a)} + \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(c-a)(b-c)} \right\}$$

$$= -\frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

উদাহরণ 3. সরল কর :

$$\frac{a+b}{2ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{2bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{2ca}(c^2+a^2-b^2).$$

$$\frac{a+b}{2ab} = \frac{a}{2ab} + \frac{b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a}.$$

এইরূপ, $\frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b}$, $\frac{c+a}{2ca} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}$.

$$\therefore \text{রাশিটি} = \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a}\right)(a^2+b^2-c^2) + \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{2b}\right)(b^2+c^2-a^2)$$

$$+ \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}\right)(c^2+a^2-b^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2a}(a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2) + \frac{1}{2b}(a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2c}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2) \\
 &= \frac{1}{2a} \cdot 2a^2 + \frac{1}{2b} \cdot 2b^2 + \frac{1}{2c} \cdot 2c^2 = a+b+c.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ 4. সরল কর :

$$\begin{aligned}
 &\frac{b+c-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b-c}{(c-a)(c-b)} \\
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= - \left\{ \frac{b+c-a}{(a-b)(c-a)} + \frac{c+a-b}{(b-c)(a-b)} + \frac{a+b-c}{(c-a)(b-c)} \right\} \\
 &= - \frac{(b^2-c^2)-a(b-c)+(c^2-a^2)-b(c-a)+(a^2-b^2)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= - \frac{\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}-\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= - \frac{0-0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\begin{aligned}
 &\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= - \left\{ \frac{a^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(b-c)} \right\} \\
 &= - \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= - \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1.
 \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 35

সরল কর :

1. $\frac{a+1}{(a-b)(a-c)} + \frac{b+1}{(b-c)(b-a)} + \frac{c+1}{(c-a)(c-b)}$
2. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$
3. $\frac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$ (C. U. 1948)
4. $\frac{a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2(c-a)}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2(a-b)}{(c+a)(c+b)}$ (C. U. 1947)

5. $\frac{b+c-k}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a-k}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b-k}{(c-a)(c-b)}$. (C. U. 1946)
6. $\frac{3a-b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{3b-c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{3c-a-b}{(c-a)(c-b)}$. (D. B. 1933)
7. $\frac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$. (C. U. 1940)
8. $\frac{(a+1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+1)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(c+1)^2}{(c-a)(c-b)}$.
9. $\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} + 3$. (C. U. 1939)
10. $\frac{a+b}{ab}(a^3+b^3-c^3) + \frac{b+c}{bc}(b^3+c^3-a^3) + \frac{c+a}{ca}(c^3+a^3-b^3)$.
11. $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$.
12. $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$.
13. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.
14. $\frac{(x-c)(x-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$. (A. U. 1941)
15. $\frac{1}{bc(b-a)(c-a)} + \frac{1}{ca(c-b)(a-b)} + \frac{1}{ab(a-c)(b-c)}$.
16. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$. (C. U. 1915)
17. $\frac{a}{bc(a-b)(a-c)} + \frac{b}{ca(b-c)(b-a)} + \frac{c}{ab(c-a)(c-b)}$. (A.U. 1917)
18. $\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(b-c)}$. (S. F. 1957)

40. ভগ্নাংশের গুণন। ভগ্নাংশের গুণনের নিয়ম দেওয়া গেল :

নিয়ম। দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের লবগুলির গুণফলকে লব এবং হরগুলির গুণফলকে হর ধরিলে ভগ্নাংশগুলির গুণফল পাওয়া যায়।^{*} সম্ভবস্থলে লব ও হরের সাধারণ গুণনীয়কগুলি কাটিয়া গুণফলটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিবে।

উদাহরণ। সরল কর : $\frac{x^2-y^2}{a+x} \times \frac{a^2-x^2}{ax-ay} \times \left(a + \frac{ax}{a-x}\right)$.

$$\therefore a + \frac{ax}{a-x} = \frac{a^2-ax+ax}{a-x} = \frac{a^2}{a-x}$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(x+y)(x-y)}{a+x} \times \frac{(a+x)(a-x)}{a(x-y)} \times \frac{a^2}{a-x} \\ = a(x+y).$$

প্রশ্নমালা 36

সরল কর :

1. $\frac{a^3b^2}{c^4} \times \frac{b^3c^2}{a^4} \times \frac{c^3a^2}{b^4}$
2. $\frac{2a^2x^3}{3bcy^3} \times \frac{3b^2y^3}{4caz^3} \times \frac{4c^2z^3}{5abx^3}$
3. $\frac{x+y}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$
4. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \times \frac{ab}{a^2-b^2}$
5. $\frac{a+b}{a-b} \times \frac{a^2-3ab+2b^2}{a^2-ab-2b^2}$
6. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab} \times \frac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2}$
7. $\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3} \times \frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)(a^2+b^2)}$
8. $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$
9. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} \times \frac{a-b}{a(a+b)}$
10. $\frac{(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)}{(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)}$
11. $\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+c)^2-b^2} \times \frac{c^2-(a-b)^2}{b^2-(a-c)^2}$
12. $\frac{(a-b)^2}{a+b} \times \frac{a^2+b^2}{a-b} \times \frac{a^2+ab}{a^4-b^4}$
13. $\left(1 + \frac{y}{x-y}\right) \left(1 - \frac{y}{x+y}\right) \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)$
14. $\frac{x-y}{x+y} \times \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \times \left(1 + \frac{2xy}{x^2-xy+y^2}\right)$
15. $\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{b^2-c^2-a^2+2ac} \times \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{c^2+a^2-b^2+2ac}$
16. $\frac{2x^2-x-1}{2x^2-5x+3} \times \frac{3x^2+4x-4}{3x^2+10x+8} \times \frac{6x^2-x-12}{6x^2-x-2}$

41. ভগ্নাংশের ভাগ। ভগ্নাংশের ভাগের নিয়ম দেওয়া গেল :

নিয়ম। ভাজ্যকে ভাজকের অন্যোত্থক দ্বারা গুণ করিলে ভাগফল পাওয়া যায়। সম্ভবহলে লব ও হরের সাধারণ গুণনীয়কগুলি কাটিয়া ভাগফলটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিবে।

উদাহরণ। সরল কর : $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right)$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$\text{এবং } \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{4xy}{x^2-y^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \div \frac{4xy}{x^2-y^2} \\ &= \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \times \frac{x^2-y^2}{4xy} = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 37

সরল কর :

1. $\frac{a^2}{x^2y} \div \frac{ab}{xy^2}$
2. $\frac{xy^2z^3}{a^2bc} \div \frac{x^2y^3z}{ab^2c}$
3. $\frac{x^2-9}{x^2-16} \div \frac{x-3}{x+4}$
4. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2} \div \frac{x+1}{x-2}$
5. $\frac{ab}{c^2} \div \frac{b^2}{ac} \times \frac{bc}{a^2}$
6. $\frac{a^2-ab}{ab+b^2} \div \frac{a-b}{a+b}$
7. $\frac{a^2-4b^2}{4a^2-b^2} \div \frac{a+2b}{2a-b}$
8. $\frac{a^4-b^4}{a^2+2ab+b^2} \div \frac{a-b}{a(a+b)}$
9. $\frac{a^3-b^3}{b^2+ab} \div \frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab}$
10. $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3} \div \frac{(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}}{(a-b)^2+3ab}$
11. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} \div \frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$
12. $\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-5x+2} \div \frac{3x^2-7x+4}{3x^2-10x+8}$
13. $\left(\frac{2x}{x-y}-1\right) \div \left(\frac{2y}{x-y}+1\right)$
14. $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right) \div \left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$
15. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6} \div \frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \times \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3}$
16. $\frac{x^3-y^3}{(x+y)^2-xy} \div \frac{(x-y)^2+xy}{x^3+y^3} \times \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2-4xy}$

42. জটিল ভগ্নাংশ।

যে ভগ্নাংশের লব ও হরের কোন একটি অথবা উভয়েই ভগ্নাংশ, তাহার বিশেষ নাম জটিল ভগ্নাংশ (Complex Fraction)।

জটিল ভগ্নাংশকে সরল করিতে হইলে, উহার লবকে হর দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

উদাহরণ। সরল কর :

$$\frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}}{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}}{\left(\frac{a-b}{a+b} + 1\right) + \left(\frac{b-c}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{c-a}{c+a} + 1\right)} \\ &= \frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}}{\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a}} = \frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}}{2\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

43. ক্রমিক ভগ্নাংশ।

নিম্নের উদাহরণের দ্বারা ভগ্নাংশকে ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued fraction) বলে। ক্রমিক ভগ্নাংশকে সরল করিতে হইলে, পাটীগণিতের দ্বারা উহার সর্বনিম্ন ভাগ হইতে কার্য আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে উঠিতে হয়।

উদাহরণ। সরল কর :
$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}$$
 (A. U. 1912)

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x+1}{2x+1}} = \frac{1}{\frac{2x+1+x+1}{2x+1}} = \frac{2x+1}{3x+2} \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 38

সরল কর :

1. $\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1}$
2. $\frac{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$
3. $\frac{\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+1}}{\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{x-1}}$
4. $\frac{\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} + 3}{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}}$
5. $\frac{\frac{ax}{x-a} + \frac{bx}{x-b} + \frac{cx}{x-c}}{\frac{a^2}{x-a} + \frac{b^2}{x-b} + \frac{c^2}{x-c} + a+b+c}$
6. $\frac{\frac{a}{a+b-c} + \frac{b}{b+c-a} + \frac{c}{c+a-b}}{\frac{a-b+c}{a+b-c} + \frac{b-c+a}{b+c-a} + \frac{c-a+b}{c+a-b} + 3}$
7. $\frac{a+b}{a-b + \frac{b^2}{a+b}} - \frac{a-b}{a+b + \frac{b^2}{a-b}}$
8. $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \left\{ 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right\}$
9. $\frac{1}{x + \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}}}$
10. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$

সহজ অভেদাবলী

44. যদি দুইটি রাশির মাঝে সমান চিহ্ন থাকে এবং উহাদের অন্তর্গত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানের জন্যই রাশি দুইটির সমতা বজায় থাকে, তবে ঐ সমতাকে **অভেদ** (Identity) বলে। যেমন, $2x+3x=5x$ একটি অভেদ; কারণ x এর যে কোন মানের জন্যই $2x+3x$ এবং $5x$ এর সমতা বজায় থাকে। $3x-1=2x+3$ একটি অভেদ নহে; কারণ x এর মান শুধু 4 হইলেই উভয় পক্ষের সমতা বজায় থাকে।

তদ্রূপ, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ একটি অভেদ; কারণ a ও b র যে কোন মানের জন্যই উভয় পক্ষের সমতা বজায় থাকে।

কোন অভেদের দুই পক্ষের সমতা প্রমাণ করিয়া অভেদটিকে প্রতিষ্ঠিত (Establish) করিতে হয়। অভেদ প্রতিষ্ঠিত করিবার নিয়ম দেওয়া গেল:

(1) অভেদের উভয় পক্ষ সমান সহজ বা সমান জটিল হইলে, বাম পক্ষকে ডান পক্ষে পরিণত করিবে অথবা উভয় পক্ষকে সরল করিয়া একই রাশিতে পরিণত করিবে।

(2) এক পক্ষ অপেক্ষা অপর পক্ষ জটিল হইলে, জটিল পক্ষকে অপর পক্ষে পরিণত করিবে।

নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় অভেদগুলি মুখস্থ করিয়া রাখিবে।

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$$

$$(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)=0$$

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর:

$$(a+b)^2=(3a-2b)^2+(3b-2a)^2+2(3a-2b)(3b-2a).$$

$$\text{বাম পক্ষ}=\{(3a-2b)+(3b-2a)\}^2=\text{ডান পক্ষ।}$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর:

$$(a+b)^2+c^2+2(a+b)c=(b+c)^2+a^2+2(b+c)a.$$

$$\text{বাম পক্ষ}=(a+b+c)^2=\{(b+c)+a\}^2=\text{ডান পক্ষ।}$$

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর:

$$4(a+b+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$$

$$+2(a+b)(b+c)+2(a+b)(c+a)+2(b+c)(c+a).$$

$$\text{বাম পক্ষ}=(2a+2b+2c)^2$$

$$=\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\}^2=\text{ডান পক্ষ।}$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.
(C. U. 1926)

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$$

$$=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+a^2d^2+b^2c^2-2abcd$$

$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2)$

$$= (ax+by)^2 + (bx-ay)^2 + (cx+dy)^2 + (dx-cy)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{বাম পক্ষ} &= a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + d^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + c^2y^2 + d^2y^2 \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + c^2x^2 + d^2y^2 + d^2x^2 + c^2y^2 \\ &= (a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy) + (b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy) \\ &\quad + (c^2x^2 + d^2y^2 + 2cdxy) + (d^2x^2 + c^2y^2 - 2cdxy) \\ &= (ax+by)^2 + (bx-ay)^2 + (cx+dy)^2 + (dx-cy)^2. \end{aligned}$$

উদাহরণ 6. প্রমাণ কর যে,

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=(x^2-5x+5)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{বাম পক্ষ} &= \{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+1 \\ &= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1 \\ &= a(a+2)+1 \quad [x^2-5x+4 \text{ কে } a \text{ ধরিয়া}] \\ &= a^2+2a+1=(a+1)^2 \\ &= (x^2-5x+4+1)^2 \\ &= (x^2-5x+5)^2. \end{aligned}$$

মন্তব্য। চারিটি উৎপাদকে দুই দুইটি করিয়া একপে লওয়া হইয়াছে যে, উহাদের গুণফল দুইটির x^2 এবং x বিশিষ্ট পদ উভয় স্থলে একই হইয়াছে।

উদাহরণ 7. দেখাও,

$$\begin{aligned} (x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x) \\ = 2(x^3+y^3+z^3-3xyz). \end{aligned}$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\},$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{1}{2}(x+y+y+z+z+x)\{(x+y-y-z)^2 \\ &\quad + (y+z-z-x)^2 + (z+x-x-y)^2\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2(x+y+z)\{(x-z)^2 + (y-x)^2 + (z-y)^2\} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} \\ &= 2(x^3+y^3+z^3-3xyz). \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 39

প্রমাণ কর :

1. $(a+b)^2 = (2a-b)^2 + (a-2b)^2 - 2(2a-b)(a-2b).$
2. $4(x+y+z)^2 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 + 2(x+y)(y+z) + 2(x+y)(z+x) + 2(y+z)(z+x).$
3. $8(a+b+c)^3 = (a+3b-c)^3 + (a-b+3c)^3 + 6(a+3b-c)(a-b+3c)(a+b+c).$
4. $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 = b^2+2b(c+a)+(c+a)^2.$

5. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2$.
 6. $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$. (C. U. 1903)
 7. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$.
 8. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}\{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2\}$.
 9. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}\{x - y\}^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$.
 10. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 16 = (x^2 + 8x + 11)^2$.
 11. $x(x-2)(x-5)(x-7) + 25 = (x^2 - 7x + 5)^2$.
 12. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7) + 16 = (4x^2 + 16x + 11)^2$.
 13. $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$. (C. U. 1865)
 14. $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.
 15. $(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 - 3(a+b-c) \times (b+c-a)(c+a-b) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

45. যে সকল অভেদের সত্যতা উহাদের অন্তর্গত অক্ষরসমূহের কোন সম্বন্ধের উপর নির্ভর করে, তাহাদিগকে **সাপেক্ষ অভেদ** (Conditional identities) বলে।

46. $a + b + c = 0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(1) $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$.

(2) $ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$;

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0^2 = 0$.

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$

এবং $ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

[পক্ষান্তর করিয়া]

(3) $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$

$= -(ab + bc + ca) = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

$a^2 + ab + b^2 = a(a+b) + b^2 = (-b-c)(-c) + b^2 = b^2 + bc + c^2$,

$b^2 + bc + c^2 = b(b+c) + c^2 = (-c-a)(-a) + c^2 = c^2 + ca + a^2$,

$c^2 + ca + a^2 = c.c + ca + a.a = c(-a-b) + ca + a(-b-c)$

$= -ca - bc + ca - ab - ca = -(ab + bc + ca)$

এবং $-(ab + bc + ca) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$; [(2) হইতে]

$\therefore a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$

$= -(ab + bc + ca) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

(4) $a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab = -(ab + bc + ca)$

$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

$a^2 - bc = (-b-c)^2 - bc = b^2 + c^2 + bc = b^2 + c(c+b) = b^2 - ca$,

$$b^2 - ca = (-c - a)^2 - ca = c^2 + a^2 + ca = c^2 + a(a+c) = c^2 - ab,$$

$$c^2 - ab = c.c - ab = c(-a - b) - ab = -(ab + bc + ca)$$

এবং $-(ab + bc + ca) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ [(2) হইতে]

$$\therefore a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab = -(ab + bc + ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$(5) \quad (ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

$$(ab + bc + ca)^2 = \left\{ -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \right\}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2$$
 [(2) হইতে]

এবং $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc \cdot 0$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\therefore (ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

$$(6) \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc. \quad (C. U. 1922, '34)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + b^3) + c^3$$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3$$

$$= (-c)^3 - 3ab(-c) + c^3$$

$$= -c^3 + 3abc + c^3$$

$$= 3abc.$$

অথবা, $a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 3abc$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 0 + 3abc \quad (\because a+b+c=0)$$

$$= 3abc.$$

ইহা হইতে নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তটিতে উপনীত হওয়া যায়।

সিদ্ধান্ত। তিনটি রাশির যোগফল শূন্য হইলে,

উহাদের ঘনের যোগফল = উহাদের ক্রমিক গুণফলের তিন গুণ।

$$(7) \quad a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

$$\therefore a + b + c = 0, \quad \therefore a + b = -c;$$

$$\therefore (a+b)^2 = (-c)^2,$$

বা $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = -2ab,$$

$$\therefore (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (-2ab)^2,$$

বা $a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = 4a^2b^2$

$$\therefore a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

এবং $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2.$

[(5) হইতে]

উদাহরণ 1. $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

$$\begin{aligned}\text{বাম পক্ষ} &= \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{(b+c-c-a)^2 + (c+a-a-b)^2 + (a+b-b-c)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \quad [\because 1^2 = (-1)^2] \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $2s = a + b + c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $s^2 + (s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) = ab + bc + ca$.
 (C. U. 1944)

$$\begin{aligned}\text{বাম পক্ষ} &= s^2 + s^2 - as - bs + ab + s^2 - bs - cs + bc + s^2 - cs - as + ca \\ &= 4s^2 - 2as - 2bs - 2cs + ab + bc + ca \\ &= 4s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca \\ &= 4s^2 - 2s \cdot 2s + ab + bc + ca \\ &= ab + bc + ca.\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $2s = a + b + c$ হইলে, দেখাও যে,
 $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$. (C. U. 1867)

$$\begin{aligned}\text{বাম পক্ষ} &= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= \{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\} \\ &= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \\ &= (a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b) \\ &= 2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b) \\ &= 2s \times 2(s-a) \times 2(s-c) \times 2(s-b) \\ &= 16s(s-a)(s-b)(s-c).\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. $ax + by = m$, $bx - ay = n$, $a^2 + b^2 = 1$ হইলে, দেখাও যে,
 $x^2 + y^2 = m^2 + n^2$. (C. U. 1939)

$$\begin{aligned}\text{বর্গ করিয়া, } & a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy = m^2 \\ & b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy = n^2 \\ \text{যোগ করিয়া, } & x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) = m^2 + n^2 \\ \therefore & x^2 \cdot 1 + y^2 \cdot 1 = m^2 + n^2 \\ \therefore & x^2 + y^2 = m^2 + n^2.\end{aligned}$$

উদাহরণ 5. $a + b = 1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $(a^2 - b^2)^2 = a^3 + b^3 - ab$. (C. U. 1928)

$$\begin{aligned}
 (a^2 - b^2)^2 &= \{(a+b)(a-b)\}^2 = (a+b)^2(a-b)^2 \\
 &= (a+b)(a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= 1.(a+b)\{(a^2 - ab + b^2) - ab\} \\
 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)ab \\
 &= a^3 + b^3 - 1.ab = a^3 + b^3 - ab.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ 6. $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(ad - bc)(ad + bc) = (a - c)(a + c).$$

সর্ত হইতে, $b^2 = 1 - a^2$ এবং $d^2 = 1 - c^2$;

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{বাম পক্ষ} &= a^2 d^2 - b^2 c^2 \\
 &= a^2(1 - c^2) - c^2(1 - a^2) \\
 &= a^2 - c^2 = (a - c)(a + c).
 \end{aligned}$$

উদাহরণ 7. $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b^2$, $x^3 + y^3 = c^3$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $a^3 + 2c^3 = 3ab^2$. (C. U. 1948)

$$\begin{aligned}
 a^3 + 2c^3 &= (x + y)^3 + 2(x^3 + y^3) \\
 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 2(x^3 + y^3) \\
 &= 3(x^3 + y^3) + 3xy(x + y) \\
 &= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy(x + y) \\
 &= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2 + xy) \\
 &= 3(x + y)(x^2 + y^2) = 3ab^2.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ 8. $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$, $z = c^2 - ab$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $ax + by + cz = (a + b + c)(x + y + z)$.

$$\begin{aligned}
 \text{বাম পক্ষ} &= a(a^2 - bc) + b(b^2 - ca) + c(c^2 - ab) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
 &= (a + b + c)\{(a^2 - bc) + (b^2 - ca) + (c^2 - ab)\} \\
 &= (a + b + c)(x + y + z).
 \end{aligned}$$

উদাহরণ 9. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ হইলে, দেখাও যে,

$$a + b + c = 0, \text{ অথবা } a = b = c.$$

(C. U. 1939)

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc,$$

$$\text{বা } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$

$$\text{বা } \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = 0.$$

এখন, দুইটি রাশির গুণফল শূন্য বলিয়া উহাদের একটি শূন্য হইবে।

$$\therefore a + b + c = 0, \text{ অথবা } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0.$$

কিন্তু $(a - b)^2$, $(b - c)^2$ এবং $(c - a)^2$ এর প্রত্যেকটি মূলদ (rational) রাশির বর্গ বলিয়া ধনাত্মক (positive) ; সুতরাং উহাদের প্রত্যেকটি শূন্য না হইলে উহাদের যোগফল শূন্য হইতে পারে না।

$$\begin{aligned}
 \therefore a-b &= 0 & \therefore a &= b \\
 b-c &= 0 & \therefore b &= c \\
 c-a &= 0 & \therefore c &= a \\
 \therefore a &= b = c \\
 \therefore a+b+c &= 0, \text{ অথবা } a=b=c.
 \end{aligned}$$

উদাহরণ 10. $a = x^2 - yz$, $b = y^2 - zx$, $c = z^2 - xy$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2$.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \dots (1)$$

$$\text{এখন, } a+b+c = x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

$$= \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

$$a-b = (x^2 - yz) - (y^2 - zx) = x^2 - y^2 + zx - yz$$

$$= (x+y)(x-y) + z(x-y)$$

$$= (x-y)(x+y+z).$$

$$\text{তদ্রূপ, } b-c = (y-z)(x+y+z), c-a = (z-x)(x+y+z)$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

$$\times \{(x-y)^2(x+y+z)^2 + (y-z)^2(x+y+z)^2 + (z-x)^2(x+y+z)^2\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

$$\times \{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}(x+y+z)^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}\right]^2$$

$$= (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2.$$

প্রশ্নমালা 40

1. $ad = bc$ হইলে, দেখাও যে,

$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab + cd)^2. \quad (\text{C. U. 1946})$$

2. $a = x^2 - yz$, $b = y^2 - zx$, $c = z^2 - xy$ হইলে, দেখাও যে,

$$ax + by + cz = (a+b+c)(x+y+z). \quad (\text{C. U. 1927})$$

$a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$3. (a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3$$

$$= 3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

$$4. (a+2b+3c)^3 + (b+2c+3a)^3 + (c+2a+3b)^3$$

$$= 3(a+2b+3c)(b+2c+3a)(c+2a+3b).$$

$$5. a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 = 3abc \quad (\text{S. F. 1957})$$

$$6. a^2 - bc = a^2 + ab + b^2, b^2 - ca = b^2 + bc + c^2, c^2 - ab = c^2 + ca + a^2.$$

$$7. a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab. \quad (\text{C. U. 1923})$$

8. $a^2 - bc = -(ab + bc + ca)$. (C. U. 1946)
9. $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$. (C. U. 1936)
10. $(b+c)(b-c) + a(a+2b) = 0$.
11. $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = 0$.
12. $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. (C. U. 1943)
13. $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.
14. $ab + bc + ca = 0$ হইলে, দেখাও যে,
 $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2abc(a+b+c)$. [কারণ, $(ab + bc + ca)^2 = 0$.]
15. $ab + bc + ca = 1$ হইলে, দেখাও যে,
 $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$.
[1 এর স্থলে $ab + bc + ca$ বসাইয়া উৎপাদকে বিভক্ত কর।]
16. $a+b+c+d=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $(a+b)(a+c)(a+d) = -(b+c)(c+d)(d+b)$.
17. $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$ হইলে, দেখাও যে,
 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
18. $s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,
 $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab) = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$.
19. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে, $s(s-a) + (s-b)(s-c) = bc$.
20. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,
 $s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. (C. U. 1941)
21. $3s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,
 $(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 = 3(s-a)(s-b)(s-c)$. (S. F. 1967)
22. $2s=a+b+c+d$ হইলে দেখাও যে,
(i) $(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + (s-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
(ii) $(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-d) + (s-d)(s-a)$
 $= ab + bc + cd + da$.
23. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2 + (ax + by + cz)^2 = 1$.
(C. U. 1906)
[ইঙ্গিত: বন্ধনী অপসারণ করিয়া, বাম পক্ষ $= a^2(x^2 + y^2 + z^2) + b^2(x^2 + y^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2 + z^2) = (a^2 + b^2 + c^2) \times (x^2 + y^2 + z^2) = \dots$]
24. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ হইলে, দেখাও যে, $a = b = c$.
25. $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2$ হইলে, দেখাও যে, $a = b = c$.
(S. F. 1966)

26. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $a + b + c = 0$ অথবা $a = b = c$. (C. U. 1939)

27. $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$, $z = c^2 - ab$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$.

47. ভগ্নাংশগতি সহজ অভেদাবলী (Easy Fractional Identities)

উদাহরণ 1. $x = \frac{4ab}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$.

(C. U. 1947 ; S. F. 1953)

$$\begin{aligned} \text{বাম পক্ষ} &= \left(\frac{x+2a}{x-2a} - 1 \right) + \left(\frac{x+2b}{x-2b} - 1 \right) + 2 \\ &= \frac{4a}{x-2a} + \frac{4b}{x-2b} + 2 \\ &= \frac{4(ax-2ab+bx-2ab)}{(x-2a)(x-2b)} + 2 \\ &= \frac{4\{(a+b)x-4ab\}}{(x-2a)(x-2b)} + 2 \\ &= \frac{4 \times 0}{(x-2a)(x-2b)} + 2 \quad [\because (a+b)x = 4ab] \\ &= 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

উদাহরণ 2. যদি $x + y = 1 + xy$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 = 1 + x^3y^3$.

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (1+xy)^3 - 3xy(1+xy) \\ &= 1 + x^3y^3. \end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b}{a} + \frac{d}{c}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{a^3}{b^3} + \frac{c^3}{d^3} = \frac{b^3}{a^3} + \frac{d^3}{c^3}$.

প্রদত্ত মতে হইতে $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{bc+ad}{ac}$

$\therefore bd = ac$ [$\because$ লবদ্বয় সমান]

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ এবং $\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$;

$\therefore \frac{a^3}{b^3} + \frac{c^3}{d^3} = \frac{b^3}{a^3} + \frac{d^3}{c^3}$.

উদাহরণ 4. $a + b + c = 0$ হইলে, দেখাও যে,

$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = 0$. (C. U. 1938)

$$\begin{aligned}\text{বাম পক্ষ} &= \frac{1}{b^2+c^2-(-b-c)^2} + \frac{1}{c^2+a^2-(-c-a)^2} + \frac{1}{a^2+b^2-(-a-b)^2} \\ &= \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ca} + \frac{1}{-2ab} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{a+b+c}{abc} = -\frac{1}{2} \times 0 = 0.\end{aligned}$$

উদাহরণ 5. $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ হইলে, হয় $a+b+c=0$

নতুবা $a=b=c$.

(C. U. 1931 ; S. F. 1957)

$$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}, \text{ বা } a(c+a) = b(b+c);$$

$$\therefore a^2 - b^2 + ac - bc = 0,$$

$$\text{বা } (a+b)(a-b) + c(a-b) = 0,$$

$$\text{বা } (a+b+c)(a-b) = 0$$

$$\therefore a+b+c=0, \text{ অথবা } a-b=0 \text{ অর্থাৎ } a=b.$$

আবার, $\therefore \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}, \text{ বা } b(a+b) = c(c+a);$

$$\therefore b^2 - c^2 + ab - ac = 0,$$

$$\text{বা } (b+c)(b-c) + a(b-c) = 0,$$

$$\text{বা } (a+b+c)(b-c) = 0$$

$$\therefore a+b+c=0, \text{ অথবা } b-c=0 \text{ অর্থাৎ } b=c.$$

$$\therefore a+b+c=0, \text{ অথবা } a=b=c.$$

উদাহরণ 6. $\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c+a}{b} = 1$ হইলে এবং $a-b+c=0$ না হইলে,

প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$

(C. U. 1875)

$$\therefore \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c+a}{b} = 1,$$

$$\text{বা } \frac{a-b}{c} + 1 + \frac{b-c}{a} - 1 + \frac{c+a}{b} - 1 = 0,$$

$$\text{বা } \frac{a-b+c}{c} + \frac{b-c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} = 0,$$

$$\text{বা } \frac{a-b+c}{c} - \frac{a-b+c}{a} + \frac{a-b+c}{b} = 0.$$

$$\therefore (a-b+c)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

$\therefore$ উৎপাদক দুইটির একটি শূন্য হইবে ; কিন্তু $a-b+c$ শূন্য নহে।

$$\therefore \frac{1}{c}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0 \quad \therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

উদাহরণ 7. $a+\frac{1}{b}=1$ এবং $b+\frac{1}{c}=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(i) \ c+\frac{1}{a}=1 \text{ এবং } (ii) \ abc+1=0. \quad (C. U. 1940, '48)$$

$$\therefore a+\frac{1}{b}=1 \quad \therefore a=1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b} \quad \therefore \frac{1}{a}=\frac{b}{b-1},$$

$$\therefore b+\frac{1}{c}=1 \quad \therefore \frac{1}{c}=1-b \quad \therefore c=\frac{1}{1-b}$$

$$\therefore (i) \ c+\frac{1}{a}=\frac{1}{1-b}+\frac{b}{b-1}=\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1-b}=\frac{1-b}{1-b}=1.$$

$$(ii) \ abc+1=a.b.c+1=\frac{b-1}{b}.b.\frac{1}{1-b}+1$$

$$=-\frac{1-b}{b}.b.\frac{1}{1-b}+1=-1+1=0.$$

উদাহরণ 8. $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1. \quad (C. U. 1942, '49)$$

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{a}{a^2+a}+\frac{b}{b^2+b}+\frac{c}{c^2+c}$$

$$=\frac{a}{b+c+a}+\frac{b}{c+a+b}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

উদাহরণ 9 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0. \quad (C. U. 1945)$$

$$\text{বাম পক্ষ}=\left(\frac{a^2}{b+c}+a\right)+\left(\frac{b^2}{c+a}+b\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}+c\right)-(a+b+c)$$

$$=\frac{a^2+ab+ac}{b+c}+\frac{b^2+bc+ab}{c+a}+\frac{c^2+ac+bc}{a+b}-(a+b+c)$$

$$=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(b+c+a)}{c+a}+\frac{c(c+a+b)}{a+b}-(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-1\right)$$

$$=(a+b+c)\times 0=0.$$

উদাহরণ 10. $2s = a + b + c$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} = \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{C. U. 1907})$$

$$\text{বাম পক্ষ} = \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} \right) + \left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} \right)$$

$$= \frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)} + \frac{s-s+c}{(s-c)s} = \frac{c}{(s-a)(s-b)} + \frac{c}{(s-c)s}$$

$$= c \times \frac{s(s-c) + (s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = c \times \frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= c \times \frac{2s^2 - 2s^2 + ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

প্রশ্নমালা 41

প্রমাণ কর :

$$1. \frac{a^2bc + ab^2c + abc^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$$

$$2. \frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)} + \frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} = 3.$$

$$3. \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

$$4. x + \frac{1}{x} = 2 \text{ হইলে, দেখাও যে, } x^4 + \frac{1}{x^4} = 2. \quad (\text{D. B. 1936})$$

$$5. \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 = 3 \text{ হইলে, দেখাও যে, } a^3 + \frac{1}{a^3} = 0. \quad (\text{C. U. 1924, '45})$$

$$6. bc + ca + ab = 0 \text{ হইলে, প্রমাণ কর যে, } \frac{1}{a^2 - bc} + \frac{1}{b^2 - ca} + \frac{1}{c^2 - ab} = 0. \quad (\text{C. U. 1906, '27 ; S. F., '55, '62, '69})$$

$$[a^2 - bc = a^2 + ca + ab = a(a+b+c), b^2 - ca = b(a+b+c),$$

$$c^2 - ab = c(a+b+c) \text{ ধরিয়া বাম পক্ষ যোগ কর।}]$$

$$a+b+c=0 \text{ হইলে, প্রমাণ কর যে,}$$

$$7. \frac{1}{(a+b)(a+c)} + \frac{1}{(b+c)(b+a)} + \frac{1}{(c+a)(c+b)} = 0. \quad (\text{S. F. 1965})$$

$$8. \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0. \quad (\text{C. U. 1938, '67})$$

$$9. \frac{2a^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{2b^2}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{2c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = -3.$$

$$10. \frac{a}{a^2 - bc} + \frac{b}{b^2 - ca} + \frac{c}{c^2 - ab} = 0.$$

$$[a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab = -(ab + bc + ca), \text{ অঙ্ক. 46 (4) }]$$

$$11. \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2b^2+ca} + \frac{1}{2c^2+ab} = 0.$$

[$2a^2+bc=a^2+a.a+bc=a^2+(-b-c)a+bc=(a-b)(a-c)$, ইত্যাদি।
এখন উদা. 1, পৃ: 44 দেখ।]

$$12. \frac{a}{2a^2+bc} + \frac{b}{2b^2+ca} + \frac{c}{2c^2+ab} = 0. \quad [\text{উদা. 2, পৃ: 44 দেখ।}]$$

$$13. a+b+c=1 \text{ হইলে, প্রমাণ কর যে,}$$

$$\frac{a+bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b+ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c+ab}{(c+a)(c+b)} = 3.$$

[$a+bc=a.1+bc=a^2+ab+ac+bc=(a+b)(a+c)$, ইত্যাদি।]

$bc+ca+ab=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$14. \frac{1+a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{1+b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{1+c^2}{(c+a)(c+b)} = 3.$$

[$(a+b)(a+c)=a^2+ab+ac+bc=1+a^2$, ইত্যাদি।]

$$15. \frac{a+b}{1-ab} + \frac{b+c}{1-bc} + \frac{c+a}{1-ca} = \frac{1}{abc}. \quad (\text{C. U. 1898})$$

[$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{a+b}{bc+ca} = \frac{1}{c}$, ইত্যাদি।]

$$16. bc+ca+ab=abc \text{ হইলে, প্রমাণ কর যে,}$$

$$\frac{a+b}{ab(c-1)} + \frac{b+c}{bc(a-1)} + \frac{c+a}{ca(b-1)} = 1.$$

[$\frac{a+b}{ab(c-1)} = \frac{a+b}{abc-ab} = \frac{a+b}{bc+ca+ab-ab} = \frac{1}{c}$, ইত্যাদি।]

$$17. \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} \text{ হইলে,}$$

$$a+b+c=0 \text{ অথবা } a=b=c.$$

(C. U. 1931)

$$18. a+b=2c \text{ হইলে, প্রমাণ কর যে,}$$

$$\frac{a}{a-c} + \frac{c}{b-c} = 1 \text{ এবং } \frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2.$$

[সত্য হইতে, $b-c=c-a=-(a-c)$ ধর এবং $b=2c-a$ ধর।]

$$19. a+2b+3c=0 \text{ হইলে, প্রমাণ কর যে, } \frac{2c}{a+c} - \frac{a}{b+c} = 2.$$

[সত্য হইতে, $a+c=-2(b+c)$;

$$\therefore \text{ বাম পক্ষ} = -\frac{2c}{2(b+c)} - \frac{a}{b+c} = -\frac{a+c}{b+c} = -\frac{-2(b+c)}{b+c} = 2.]$$

$$20. 3s=a+b+c \text{ হইলে, প্রমাণ কর যে,}$$

$$\frac{(s-a)^2}{(s-b)(s-c)} + \frac{(s-b)^2}{(s-c)(s-a)} + \frac{(s-c)^2}{(s-a)(s-b)} = 3. \quad (\text{C. U. 1942})$$

21. $a + \frac{1}{b} = 1$ এবং $b + \frac{1}{c} = 1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$c + \frac{1}{a} = 1 \text{ এবং } abc + 1 = 0. \quad (\text{C. U. 1940, '48})$$

22. $a^2 = by + cz$, $b^2 = cz + ax$, $c^2 = ax + by$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{x+a} + \frac{y}{y+b} + \frac{z}{z+c} = 1. \quad (\text{S. F. 1970})$$

$$\left[\frac{x}{x+a} = \frac{ax}{ax+a^2} = \frac{ax}{ax+by+cz}, \text{ ইত্যাদি।} \right]$$

সরল সমীকরণ

48. আক্ষরিক সহগ সংবলিত সমীকরণ।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b) = 2a(a-b)$.

$$\text{বাম পক্ষ} = (x^2 + ax - bx - ab) - (x^2 - ax + bx - ab)$$

$$= 2ax - 2bx = 2(a-b)x$$

$$\therefore 2(a-b)x = 2a(a-b) \quad \therefore x = a.$$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 0$.

হরগুলির ল. সা. গু. abc দ্বারা প্রত্যেক পদকে গুণ করিয়া,

$$a(x-a) + b(x-b) + c(x-c) = 0,$$

$$\text{বা } ax - a^2 + bx - b^2 + cx - c^2 = 0,$$

$$\text{বা } (a+b+c)x = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c}.$$

প্রশ্নমালা 42

সমাধান কর :

$$1. 5(x-a) + 3(2x-5a) = 2a. \quad 2. a(x-b) + b(x-a) = a^2 + b^2.$$

$$3. a^2(x-a) + b^2(x+b) + abx = 0. \quad 4. p^2(x-p) + q^2(x-q) = pqx.$$

$$5. a(x-a) + b(x-b) + c(x-c) = 2(ab+ac+bc).$$

$$6. (x+a)(x-b) + (x-a)(x+b) = 2(x-a)(x-b).$$

$$7. \frac{a-x}{a} + \frac{2a-x}{2a} = \frac{3a-x}{3a}. \quad (\text{C. U. 1937})$$

$$8. \frac{ax+b}{a+b} - \frac{cx+d}{c+d} = 0.$$

$$9. \frac{x}{a+b} + \frac{x}{a-b} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

$$10. \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0. \quad (\text{C. U. 1914})$$

49. ভগ্নাংশ সংবলিত কোন সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি শুধু লবে থাকিলে, হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া সাধারণ নিয়মে সমীকরণ সমাধান করা চলে। কিন্তু স্থলবিশেষে পক্ষান্তর ও পদ-সংযোগ দ্বারা কৌশলে সমীকরণ সমাধান করা যায়।

প্রথম কৌশল। পক্ষান্তরকরণ।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$\frac{16x+11}{33} + \frac{3x+1}{5} = \frac{18x+7}{25} + \frac{4x+3}{11}.$$

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{16x+11}{33} - \frac{4x+3}{11} = \frac{18x+7}{25} - \frac{3x+1}{5},$

বা $\frac{16x+11-12x-9}{33} = \frac{18x+7-15x-5}{25},$

বা $\frac{4x+2}{33} = \frac{3x+2}{25}$

উভয় পক্ষকে 33×25 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$100x+50=99x+66 \quad \therefore x=16.$$

দ্বিতীয় কৌশল। পদ-সংযোগ।

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$\frac{ax+a^2}{b+c} + \frac{bx+b^2}{c+a} + \frac{cx+c^2}{a+b} + a+b+c=0. \quad (\text{C. U. 1942})$$

পদ-সংযোগ করিয়া, $\left(\frac{ax+a^2}{b+c} + a\right) + \left(\frac{bx+b^2}{c+a} + b\right) + \left(\frac{cx+c^2}{a+b} + c\right) = 0,$

বা $\frac{ax+a^2+ab+ac}{b+c} + \frac{bx+b^2+bc+ab}{c+a} + \frac{cx+c^2+ac+bc}{a+b} = 0,$

বা $\frac{a(x+a+b+c)}{b+c} + \frac{b(x+b+c+a)}{c+a} + \frac{c(x+c+a+b)}{a+b} = 0,$

বা $(x+a+b+c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) = 0.$

দুইটি রাশির গুণফল শূন্য বলিয়া উহাদের মধ্যে একটির মান অবশ্যই শূন্য হইবে।

কিন্তু, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ এর মান স্পষ্টতঃই শূন্য নহে;

$$\therefore x+a+b+c=0$$

$$\therefore x = -a-b-c = -(a+b+c).$$

প্রশ্নমালা 43

সমাধান কর :

$$1. \frac{x+3}{4} - \frac{x+4}{5} = \frac{x+5}{6} - \frac{x+6}{7}. \quad (\text{C. U. 1917, '29})$$

$$2. \frac{3x+4}{8} + \frac{5x+3}{9} = \frac{2x+3}{3} + \frac{5x-12}{16}.$$

$$3. \frac{11x-2}{14} + \frac{5x-2}{9} = \frac{20x+1}{27} + \frac{3x+2}{7}.$$

$$4. \frac{x+a}{b+c} + \frac{x+b}{c+a} + \frac{x+c}{a+b} + 3 = 0. \quad (\text{D. B. 1948})$$

$$5. \frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3. \quad (\text{C. U. 1927, '38, '46})$$

$$6. \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} + \frac{x-ab}{a+b} = a+b+c. \quad (\text{C. U. 1905 ; S. F. '68})$$

$$7. \frac{x-a}{b+c+2a} + \frac{x-b}{c+a+2b} + \frac{x-c}{a+b+2c} + 3 = 0.$$

$$8. \frac{x+b+c}{1+bc} + \frac{x+c+a}{1+ca} + \frac{x+a+b}{1+ab} + a+b+c = 0.$$

$$9. \frac{bc(ax-1)}{b+c} + \frac{ca(bx-1)}{c+a} + \frac{ab(cx-1)}{a+b} = a+b+c. \quad (\text{C. U. 1902})$$

$$10. \frac{x-(b^3+c^3)}{a^2-3bc} + \frac{x-(c^3+a^3)}{b^2-3ca} + \frac{x-(a^3+b^3)}{c^2-3ab} = a+b+c.$$

$$11. \frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2} = 2(a+b+c). \quad (\text{C. U. 1906})$$

[ডান পক্ষকে পক্ষান্তর করিয়া বাম পক্ষের পদ তিনটি হইতে যথাক্রমে $b+c$, $c+a$ এবং $a+b$ বিয়োগ কর।]

$$12. \frac{x+a^2+2c^2}{b+c} + \frac{x+b^2+2a^2}{c+a} + \frac{x+c^2+2b^2}{a+b} = 0.$$

[বাম পার্শ্বের পদ তিনটির সহিত যথাক্রমে $b-c$, $c-a$ ও $a-b$ অর্থাৎ 0 যোগ কর।]

$$13. \frac{x+a^3+2b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{x+b^3+2c^3}{c^2+ca+a^2} + \frac{x+c^3+2a^3}{a^2+ab+b^2} = 0.$$

[বাম পার্শ্ব হইতে $(b-c)+(c-a)+(a-b)$ অর্থাৎ 0 বিয়োগ কর।]

$$14. \frac{x-a^2}{b+c} + \frac{x-b^2}{c+a} + \frac{x-c^2}{a+b} = 4(a+b+c). \quad (\text{C. U. 1908})$$

[$4(a+b+c) = (2a+b+c) + (2b+c+a) + (2c+a+b)$ ধরিয়া পক্ষান্তর কর।]

50. ভগ্নাংশ সংবলিত কোন সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি যদি শুধু হরে থাকে, তবে পদগুলিকে হরসমূহের ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া উহাদিগকে অথও রাশিতে আনিয়া সাধারণ নিয়মে সমীকরণ সমাধান করিতে হয়। আর সমান চিহ্নের দুই পার্শ্বে দুইটি পদ থাকিলে, উহাদের হর দুইটির ল. সা. গু. দ্বারা গুণ না করিয়া সাধারণতঃ নিম্নোক্ত আড়গুণনঘটিত উপপাত্তের সাহায্যে ভগ্নাংশ অপসারণ করা হইয়া থাকে, যদিও উভয় স্থলেই একই ফল পাওয়া যায়। কোন কোন স্থলে কৌশল অবলম্বন করিয়া সমীকরণ সমাধান করা চলে।

51. উপপাত্ত। কোন সমীকরণে সমান চিহ্নের দুই পার্শ্বে দুইটি পদ থাকিলে, একটির লব ও হরকে যথাক্রমে অপরটির হর ও লব দ্বারা গুণ করিলে যে দুইটি গুণফল পাওয়া যায়, তাহারা পরস্পর সমান হয়।

যেমন, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হইলে, $ad = bc$ হইবে; কারণ, হরদ্বয়ের ল. সা. গু. bd দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিলে $ad = bc$ হয়।

এরূপ গুণনকে আড়গুণন (Crosswise multiplication) বলে।

দ্রষ্টব্য। পদ দুইটির একটির চিহ্ন - হইলে, চিহ্নটিকে লবের সহিত অথবা হরের সহিত লইবে। যেমন,

$\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$ হইলে, (1) $\frac{a}{b} = \frac{-c}{d}$, অথবা $\frac{a}{b} = \frac{c}{-d}$ কিন্তু $\frac{a}{b} = \frac{-c}{-d}$ নহে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+1)}$$

হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া,

$$(x+3)(x+4) + (x+1)(x+4) = (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3),$$

$$\text{বা } x^2 + 7x + 12 + x^2 + 5x + 4 = x^2 + 3x + 2 + x^2 + 5x + 6,$$

$$\text{বা } 12x + 16 = 8x + 8,$$

$$\text{বা } 4x = -8 \therefore x = -2.$$

প্রথম কৌশল। কোন সমীকরণে যদি চারটি পদ থাকে, তবে আবশ্যকমত পক্ষান্তর করিয়া দুইটি পদকে এক পক্ষে এবং অপর দুইটি পদকে অপর পক্ষে এরূপভাবে লও যেন পক্ষদ্বয়কে সরল করিবার পর উহাদের লবে অজ্ঞাত রাশিটি না থাকে।

$$\text{উদাহরণ 2. সমাধান কর : } \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}$$

$$\text{পক্ষান্তর করিয়া, } \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{বা } \frac{1}{(x-4)(x-3)} = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{বা } (x-2)(x-1) &= (x-4)(x-3), \quad [\text{আড়গুণন করিয়া}] \\ \text{বা } x^2 - 3x + 2 &= x^2 - 7x + 12, \\ \text{বা } 4x &= 10 \quad \therefore x = 2\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{2}{2x-3} + \frac{3}{3x+1} = \frac{6}{6x-1} + \frac{1}{x-1}$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{2}{2x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{6}{6x-1} - \frac{3}{3x+1}$,

বা $\frac{1}{2x^2-5x+3} = \frac{9}{18x^2+3x-1}$,

বা $18x^2+3x-1 = 18x^2-45x+27$, $[\text{আড়গুণন করিয়া}]$

বা $48x = 28 \quad \therefore x = \frac{7}{12}$.

দ্বিতীয় কৌশল। গৃহীত সমীকরণটির পদগুলিকে (যে যেন তিনটি পদ) একপভাবে পক্ষান্তর কর যেন x এর চিহ্ন এবং পদগুলির চিহ্ন $+$ হয়। প্রত্যেক পদের লবকে উহার হরের x এর সহগ দ্বারা ভাগ কর। এক পক্ষের ভাগফল দুইটির সমষ্টি যদি অপর পক্ষের ভাগফলটির সমান হয়, তবে নিম্নোক্ত নিয়ম প্রযোজ্য হইবে, নতুবা সাধারণ নিয়মে হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া সমাধান করিতে হইবে।

নিয়ম। যে পদটি হইতে বৃহত্তম ভাগফলটি পাওয়া যাইবে, সেই পদটির লবকে অপর ভাগফল দুইটির অনুপাতে বিভক্ত করিয়া পদটিকে দুইটি পদে বিভক্ত কর। এখন চারিটি পদ লইয়া প্রথম কৌশলের সাহায্যে সমীকরণ সমাধান কর।

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $\frac{16}{4x-1} - \frac{9}{3x+1} = \frac{1}{x-1}$.

[পক্ষান্তর করিয়া দ্বিতীয় পদটির চিহ্ন $+$ করিলে হয়, $\frac{16}{4x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{9}{3x+1}$

এবং $16 \div 4 = 4$, $1 \div 1 = 1$ ও $9 \div 3 = 3$; সুতরাং 1 ও 3 এর যোগফল 4 হওয়ায় নিয়মটি প্রযোজ্য হইবে। এখন 16 কে 1 ও 3 এর অনুপাতে বিভক্ত করিয়া $16 = 4 + 12$ লও।]

16 এর জন্ম $4 + 12$ ধরিয়া, $\frac{4}{4x-1} + \frac{12}{4x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{9}{3x+1}$

$\therefore$ প্রথম কৌশলানুযায়ী পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{4}{4x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{9}{3x+1} - \frac{12}{4x-1},$$

বা $\frac{-3}{(4x-1)(x-1)} = \frac{-21}{(3x+1)(4x-1)}$,

বা $\frac{1}{x-1} = \frac{7}{3x+1}$, $\left[-\frac{4x-1}{3} \text{ দ্বারা গুণ করিয়া} \right]$

বা $7x-7 = 3x+1$, $[\text{আড়গুণন করিয়া}]$

বা $4x = 8 \quad \therefore x = 2$

প্রশ্নমালা 44

সমাধান কর :

1. $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{5}{6}$

2. $\frac{5}{3(2x+1)} = \frac{4}{5x+2}$

3. $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} + \frac{3}{(x-3)(x-1)} = 0$

4. $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{3}{x^2+5x+6} - \frac{5}{x^2+4x+3} = 0$

5. $\frac{3}{x^2-5x+6} + \frac{5}{x^2-7x+12} = \frac{7}{x^2-6x+8}$

6. $\frac{b}{x} = \frac{a}{x+a-b}$ (C. U. 1910)

7. $\frac{a}{bx} - \frac{b}{ax} = a^2 - b^2$ (C.U.1952)

8. $\frac{1}{2x+b} - \frac{1}{2x+a} = \frac{a-b}{2(2x^2+ab)}$
(C. U. 1943)

9. $\frac{1}{a(b-x)} + \frac{1}{b(c-x)} = \frac{1}{a(c-x)}$
(Pat. U. 1921)

10. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$
(C. U. 1930)

11. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}$
(C. U. 1948)

12. $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-9}$
(C. U. 1950)

13. $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+9} + \frac{1}{x-5}$

14. $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{3x+1} = \frac{2}{2x+1} + \frac{6}{6x+5}$

15. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x+3}$
(C. U. 1902)

16. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-3}$
(C. U. 1906)

17. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-3}$
(C. U. 1926)

18. $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+2} = \frac{7}{x+3}$
(C. U. 1931)

19. $\frac{6}{3x-5} - \frac{1}{x-5} = \frac{2}{2x-5}$

(C. U. 1871)

20. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = \frac{2}{x+b}$

(C. U. 1950)

52. ভগ্নাংশ সংবলিত কোন সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি যদি লব ও হর উভয়েই থাকে, তবে হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া সমীকরণ সমাধান করাই সাধারণ নিয়ম। কোন কোন স্থলে কোঁশল অবলম্বন করা চলে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর: $\frac{x+2}{2x+1} - \frac{4x+3}{8x-3} = 0$.

হর দুইটির ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া,

$$(x+2)(8x-3) - (2x+1)(4x+3) = 0,$$

$$\text{বা } 8x^2 + 13x - 6 - 8x^2 - 10x - 3 = 0,$$

$$\text{বা } 3x = 9 \quad \therefore x = 3.$$

প্রথম কৌশল। একই প্রকারের হরবিশিষ্ট পদগুলিকে একই পক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া সমাধান।

উদাহরণ 2. সমাধান কর: $\frac{x+4}{3} + \frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2x+11}{6}$.

পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2x+11}{6} - \frac{x+4}{3}$,

$$\text{বা } \frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2x+11-2x-8}{6},$$

$$\text{বা } \frac{2x+3}{3x+1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{বা } 4x+6=3x+1 \quad [\text{আড়গুণন করিয়া}]$$

$$\therefore x = -5.$$

দ্বিতীয় কৌশল। লবের x এর সহগ হরের x এর সহগ দ্বারা বিভাজ্য (divisible) হইলে, প্রত্যেক পদের লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া সমাধান।

উদাহরণ 3. সমাধান কর: $\frac{4x-1}{2x+1} - \frac{3x-5}{3x-2} = 1$.

সমীকরণটি হইতে, $\frac{(4x+2)-3}{2x+1} - \frac{(3x-2)-3}{3x-2} = 1$,

$$\text{বা } 2 - \frac{3}{2x+1} - 1 + \frac{3}{3x-2} = 1,$$

$$\text{বা } -\frac{3}{2x+1} + \frac{3}{3x-2} = 0, \quad \text{বা } \frac{1}{3x-2} = \frac{1}{2x+1},$$

$$\text{বা } 3x-2=2x+1 \quad \therefore x=3.$$

উদাহরণ 4. সমাধান কর: $\frac{x-3}{x-4} + \frac{x}{x-1} = \frac{x-2}{x-3} + \frac{x-1}{x-2}$.

সমীকরণটি হইতে, $\frac{(x-4)+1}{x-4} + \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{(x-3)+1}{x-3} + \frac{(x-2)+1}{x-2}$,

$$\text{বা } 1 + \frac{1}{x-4} + 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-3} + 1 + \frac{1}{x-2},$$

$$\text{বা } \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}$$

এখন, অঙ্ক. 51 এর উদা. 2 হইতে $x=2\frac{1}{2}$.

তৃতীয় কৌশল। যদি কোন সমীকরণে দুইটি পদ থাকে এবং উহাদের একটির লবে ও হরে x এর ঘাত যথাক্রমে অপরটির লবের ও হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমটির হরের এমন কোন উৎপাদক দ্বারা সমীকরণটিকে গুণ করিবে যেন উভয় পদের লবে x এর ঘাত সমান হয়। তৎপর দ্বিতীয় কৌশল অবলম্বন করিয়া সমীকরণ সমাধান করিবে।

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+7)} = \frac{x-1}{x+4}$.

$(x+7)$ দ্বারা গুণ করিয়া, $\frac{(x-3)(x+3)}{x-2} = \frac{(x-1)(x+7)}{x+4}$,

বা $\frac{x^2-9}{x-2} = \frac{x^2+6x-7}{x+4}$,

বা $x+2 - \frac{5}{x-2} = x+2 - \frac{15}{x+4}$, [লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা $\frac{-5}{x-2} = \frac{-15}{x+4}$, বা $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x+4}$,

বা $3x-6 = x+4 \therefore x=5$.

প্রশ্নমালা 45

সমাধান কর :

1. $\frac{x+3}{2x+1} = \frac{3x+5}{6x-1}$.

2. $\frac{4x+3}{6x+1} = \frac{2x+3}{3x+2}$.

3. $\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)} = 3\frac{1}{2}$.

4. $\frac{x+a+c}{x+b+c} = \frac{b}{a}$.

(D. B. 1941)

(C. U. 1939)

5. $\frac{x+a}{x+b} = \frac{x+3a}{x+a+b}$.

(C. U. 1892)

6. $\frac{x}{2x-a} + \frac{x}{2x-b} = 1$.

(C. U. 1899 ; D. B. 1932)

7. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{2}{3}$.

8. $\frac{1}{1+\frac{2}{1+\frac{4}{x}}} = \frac{3}{5}$.

9. $\frac{x+3}{4} + \frac{x-2}{2x+1} = \frac{3x+5}{12}$.

10. $\frac{x+1}{4x+3} + \frac{3x+2}{15} = \frac{x+2}{5}$.

11. $\frac{6x+1}{15} - \frac{2(x-2)}{7x-16} = \frac{2x-1}{5}$.

(C. U. 1921 ; D. B. '35)

12. $\frac{4x+3}{9} + \frac{29-7x}{12-5x} = \frac{8x+19}{18}$.

(C. U. 1868)

13. $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-6}{x+2} = 2$.

(D. B. 1927, '30, '50)

14. $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{2(x-2)}{x+2} = 5$.

(C. U. 1916, '20)

$$15. \frac{3x-7}{x-4} + \frac{2x+5}{x+2} = 5.$$

$$16. \frac{4x+3}{2x+3} - \frac{3x-2}{3x+1} = 1.$$

$$17. \frac{x-3}{x-4} + \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-4}{x-5} + \frac{x-5}{x-6}.$$

$$18. \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-5}{x-6} - \frac{x-6}{x-7}.$$

(C. U. 1939)

(C. U. 1865)

$$19. \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)} = \frac{x+5}{x+8}.$$

$$20. \frac{(x+2)(x+6)}{(x+4)(x+5)} = \frac{x+8}{x+9}.$$

(C. U. 1944)

(C. U. 1949)

$$21. \left(\frac{2x-10}{2x-5} \right)^2 = \frac{x-10}{x-5}.$$

$$22. \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^3 = \frac{x+1}{x-5}.$$

(C. U. 1941) [উভয় পক্ষকে $(x-3)^2$ দ্বারা গুণ করিয়া কষ।]

দ্বিবর্ণ সরল সহ-সমীকরণ

53. $x-y=1$ এই সমীকরণটিতে দুইটি অজ্ঞাত রাশি x ও y রহিয়াছে। অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের অসংখ্য মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইতে পারে; কারণ, যে কোন দুইটি সংখ্যার অন্তর 1 হইলেই, ঐ সংখ্যা দ্বয় দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। যেমন,

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=4 \\ y=3 \end{matrix} \quad \text{ইত্যাদি।}$$

$x+y=3$ এই সমীকরণটিও অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের অসংখ্য মান দ্বারা সিদ্ধ হইতে পারে; কারণ, যে কোন দুইটি সংখ্যার যোগফল 3 হইলেই ঐ সংখ্যা দ্বয় দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। যেমন,

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=3 \\ y=0 \end{matrix} \quad \text{ইত্যাদি।}$$

সুতরাং $x-y=1$ এবং $x+y=3$ এই সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটি x ও y এর অসংখ্য মান দ্বারা সিদ্ধ হইলেও x ও y এর মান যথাক্রমে শুধু 2 ও 1 হইলেই সমীকরণদ্বয় যুগপৎ সিদ্ধ হইবে। এইরূপ,

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিধিষ্ট দুইটি সমীকরণের প্রত্যেকটি যদি ঐ অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের একই মানদ্বয় দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হয়, তবে ঐ সমীকরণদ্বয়কে **সহ-সমীকরণ** (Simultaneous equations) বলে।

দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করিতে হইলে, ঐ অজ্ঞাত রাশিদ্বয় দ্বাৰা দুইটি স্বতন্ত্র (Independent) সমীকরণের প্রয়োজন। $x-y=1$ এবং $x+y=3$ এই দুইটি স্বতন্ত্র সমীকরণ কিন্তু $x-y=1$ এবং $x-1=y$ স্বতন্ত্র সমীকরণ নহে, উহারা পৃথক আকারে একই সমীকরণ।

যদি দুইটি সহ-সমীকরণের অজ্ঞাতরাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটি একঘাত হয় এবং উহাদের গুণফলবিধিষ্ট কোন পদ কোনও সমীকরণে না থাকে, তবে সহ-সমীকরণদ্বয়কে **সরল** বা **একঘাত সহ-সমীকরণ** বলে।

দ্বিঘণ বা দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিধিষ্ট সরল সহ-সমীকরণ সমাধান করিবার চারটি পদ্ধতি এখানে প্রদর্শিত হইবে। এতদ্ব্যতীত লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণ সমাধান করিবার পদ্ধতিও পরে প্রদর্শিত হইবে।

54. তুলনামূলক পদ্ধতি (Method of Comparison)।

$$\begin{aligned} \text{উদাহরণ সমাধান কর:} \quad & 3x + 2y = 1 \quad \dots \dots (1) \\ & 5x - 3y = 8 \quad \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ হইতে, } 2y = 1 - 3x \quad \therefore y = \frac{1 - 3x}{2} \quad \dots \dots (3)$$

$$(2) \text{ হইতে, } 3y = 5x - 8 \quad \therefore y = \frac{5x - 8}{3} \quad \dots \dots (4)$$

$$\therefore (3) \text{ ও } (4) \text{ হইতে, } \frac{1 - 3x}{2} = \frac{5x - 8}{3}$$

$$\therefore 10x - 16 = 3 - 9x,$$

[আড়গুণন করিয়া]

$$\text{বা } 19x = 19 \quad \therefore x = 1.$$

$$\therefore (3) \text{ হইতে, } y = \frac{1 - 3 \cdot 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\therefore x = 1, y = -1.$$

অতএব এই নিয়মটি পাওয়া গেল :

নিয়ম। সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটি হইতে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোনও একটির (ধর যেন y এর) মান অপর অজ্ঞাত রাশিটি (অর্থাৎ x) দ্বারা প্রকাশ কর। x দ্বারা প্রকাশিত প্রাপ্ত মান দুইটির সমতা স্থাপন করিয়া x -ঘটিত একটি সমীকরণ গঠন কর। এই সমীকরণটি সমাধান করিয়া x এর মান নির্ণয় কর। x দ্বারা প্রকাশিত y এর যে কোনও মানে x এর মান বসাইয়া y এর মান নির্ণয় কর।

মন্তব্য। x এর মান y এর দ্বারা প্রকাশ করিয়া প্রথমে y এর মান এবং পরে x এর মান নির্ণয় করিয়াও সমীকরণটি সমাধান করা চলে। সুতরাং উক্ত প্রণালীতে দুইভাবে সমীকরণ সমাধান করা চলে।

প্রশ্নমালা 46

সমাধান কর (Solve) :

$$1. \quad \begin{aligned} x + 2y &= 5, \\ 3x + y &= 5. \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} 2x - y &= 3, \\ x + 3y &= 5. \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} 3x - 2y &= 7, \\ 4x + y &= 13. \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} 2x + 3y &= 13, \\ 5x - 4y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} 4x - 3y - 10 &= 0, \\ 3x + 5y &= -7. \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} 7x + 3y - 5 &= 0, \\ 4y + 5x - 11 &= 0. \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} x + 3y &= 7, \\ 5x - y &= 3. \quad (\text{C. U. 1928}) \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} 2x + 3y &= 13, \\ 5x - 2y &= 4. \end{aligned}$$

(C. U. 1925)

$$9. \quad \begin{aligned} 4x - y &= 5, \\ 7x - 4y &= 2. \quad (\text{C. U. 1926}) \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned} x + y - 3 &= 0, \\ 4x - 5y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

(C. U. 1929)

55. পরিবর্ত পদ্ধতি (Method of Substitution)।

উদাহরণ। সমাধান কর : $7x - 4y = 3 = 2x + y$.

সুবিধার জন্ত, $7x - 4y = 3 \quad \dots (1)$

এবং $2x + y = 3 \quad \dots (2) \text{ লও।}$

(2) হইতে, $y = 3 - 2x \quad \dots (3)$

y এর এই মান (1)এ বসাইয়া, $7x - 4(3 - 2x) = 3$,

বা $7x - 12 + 8x = 3$, বা $15x = 15 \therefore x = 1$

$\therefore (3)$ হইতে, $y = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \therefore x = 1, y = 1$.

অতএব এই নিয়মটি পাওয়া গেল :

নিয়ম। সমীকরণ দুইটির যে কোনও একটি হইতে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোন একটির (ধর যেন y এর) মান অপর অজ্ঞাত রাশিটি (অর্থাৎ x) দ্বারা প্রকাশ কর। x দ্বারা প্রকাশিত y এর এই মান অপর সমীকরণটিতে বসাইয়া x এর মান নির্ণয় কর। x দ্বারা প্রকাশিত y এর মানে নির্ণীত x এর মান বসাইয়া y এর মান নির্ণয় কর।

মন্তব্য। অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোন একটির মান সমীকরণদ্বয়ের যে কোনও একটি হইতে নির্ণয় করিয়া কার্য করা চলে। সুতরাং উক্ত প্রণালীতে চারিভাবে সমীকরণ সমাধান করা যায়। যেভাবে কষিলে শ্রমের লাঘব হয়, তাহাই করিবে।

প্রশ্নমালা 47

সমাধান কর (Solve) :

1. $4x + 3y = 11,$ 2. $5x + 4y = 22,$ 3. $8x - 5y = 14,$
 $5x - 2y = 8.$ $6x - 5y = -3.$ $3y - 2x = 0.$

4. $7x + 4y + 2 = 0,$ 5. $8x + 7y = 10,$ 6. $10x - 7y = 4,$
 $5x + 6y = 8.$ $3x - 2y = 13.$ $3x + 4y = -11.$

7. $3x + 4y = 27,$ 8. $6x - 7y = 16,$ 9. $9x - 5y = 17,$
 $5x - 3y = 16.$ $9x - 5y = 35.$ $13y - 2x = 20.$
(C. U. 1915) (C. U. 1922) (C. U. 1910)

10. $x + 2y = 3$ 11. $x + 5y = 36,$ 12. $6y - x = 1,$
 $= 4x - y.$ $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}.$ $\frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}.$
(C. U. 1917) (C. U. 1912) (C. U. 1931)

56. অপনয়ন পদ্ধতি (Method of Elimination)

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $15x - 8y = 31 \quad \dots (1)$
 $13x + 12y = -11 \quad \dots (2)$

এস্থলে y কে অপনয়ন করিয়া কার্য করাই সুবিধাজনক। এখন, 8 ও 12 এর ল. সা. গু. 24 ; সুতরাং সমীকরণ দুইটিকে গুণ করিয়া y এর সাংখ্য সহগ 24 করিয়া লও।

$$(1) \text{ কে } 3 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } 45x - 24y = 93 \quad \dots \quad (3)$$

$$(2) \text{ কে } 2 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } 26x + 24y = -22 \quad \dots \quad (4)$$

$$(3) \text{ ও } (4) \text{ যোগ করিয়া, } 71x = 71 \quad \therefore x = 1$$

(1)এ x এর মান বসাইয়া,

$$15.1 - 8y = 31, \quad \text{বা } -8y = 16 \quad \therefore y = -2$$

$$\therefore x = 1, y = -2.$$

অতএব এই নিয়মটি পাওয়া গেল :

নিয়ম। সমীকরণ দুইটিকে এমন দুইটি সংখ্যা দ্বারা গুণ কর যেন উভয় সমীকরণে কোন একটি অজ্ঞাত রাশির (ধর যেন x এর) সহগ দুইটির পরস্পর সমান হয়। এই সমীকরণ দুইটি আবশ্যকমত যোগ বা বিয়োগ করিয়া x অপনয়ন কর এবং তৎপর y এর মান নির্ণয় কর। প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির যে কোনটিতে y এর মান বসাইয়া x এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{উদাহরণ 2. সমাধান কর: } bx + ay = 2ab \quad \dots \quad (1)$$

$$ax + by = a^2 + b^2 \quad \dots \quad (2)$$

$$(1) \text{ কে } a \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } abx + a^2y = 2a^2b \quad \dots \quad (3)$$

$$(2) \text{ কে } b \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } abx + b^2y = a^2b + b^3 \quad \dots \quad (4)$$

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া,

$$(a^2 - b^2)y = a^2b - b^3 = b(a^2 - b^2) \quad \therefore y = b$$

$$(1) \text{ এ } y \text{ এর মান বসাইয়া, } bx + ab = 2ab,$$

$$\text{বা } bx = ab \quad \therefore x = a$$

$$\therefore x = a, y = b.$$

$$\text{উদাহরণ 3. সমাধান কর: } \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = \frac{1}{3} \quad \dots \quad (2) \quad (\text{C. U. 1927})$$

সমীকরণদ্বয়ে $\frac{1}{x}$ এর জন্ম u এবং $\frac{1}{y}$ এর জন্ম v ধরিয়া,

$$2u + 3v = 2 \quad \dots \quad (3) \quad u - \frac{v}{2} = \frac{1}{3} \quad \dots \quad (4)$$

$$(4) \text{ কে } 6 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } 6u - 3v = 2 \quad \dots \quad (5)$$

$$(3) \text{ ও } (5) \text{ যোগ করিয়া, } 8u = 4 \quad \therefore u = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \therefore x = 2$$

$$(1) \text{ এ } x = 2 \text{ বসাইয়া, } \frac{2}{2} + \frac{3}{y} = 2, \text{ বা } \frac{3}{y} = 1 \quad \therefore y = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 3.$$

প্রশ্নমালা 48

সমাধান কর (Solve) :

1. $x+2y=4,$
 $3x-y=5.$
2. $3x-2y=5,$
 $4x+y=14.$
3. $4x-3y=17,$
 $3x+2y=0.$
4. $2x+y$
 $=3y-x=7.$
(C. U. 1913)
5. $3x+5y=69,$
 $x-2y=1.$
(C. U. 1919)
6. $7x-3y=31,$
 $9x-5y=41.$
(C. U. 1920)
7. $3x+5y=45,$
 $8x+3y-58=0.$
8. $6x-7y=70,$
 $10y+3x=-19.$
9. $12x-7y=-28,$
 $15x-10y=-25.$
10. $\frac{2x+2y-3}{5} = \frac{3x-7y+4}{6} = \frac{8y-x+2}{7}.$ (C. U. 1914)

[ভগ্নাংশগুলি অপনোদন করিয়া কষ।]

11. $\frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y-5,$
 $\frac{5y-7}{2} + \frac{4x-3}{6} = 18-5x.$
12. $\frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x-8,$
 $\frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x+4.$
13. $x+y=a+b,$
 $ax-by=a^2-b^2.$
14. $x+y=3(a+b),$
 $ay-bx=2(a^2-b^2).$

15. $ax+by=c, a^2x+b^2y=c^2.$ (C. U. 1881)

16. $x-y=2a, ax+by=a^2+b^2.$ (M. U. 1926)

17. $2x+\frac{3}{y}=4,$
 $3x+\frac{2}{y}=5.$
18. $\frac{1}{5x}+\frac{y}{9}=5,$
 $\frac{1}{3x}+\frac{y}{2}=14.$
19. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2,$
 $\frac{5}{x}+\frac{10}{y}=5\frac{5}{8}.$

20. $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=3,$
 $\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=48.$
21. $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1,$
 $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}.$
22. $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3y}=5,$
 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13.$

23. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}, 2x+3y=2xy.$
24. $4x+3y=2xy,$
 $6y-4x=xy.$

[দ্বিতীয় সমীকরণকে xy দ্বারা ভাগ
করিয়া কষ।]

[সমীকরণদ্বয়কে xy দ্বারা ভাগ
করিয়া কষ।]

57. বহুগুণন পদ্ধতি (Method of Cross-multiplication)

এই প্রণালীতে সমীকরণ সমাধানের জগ্ন নিম্নোক্ত উপপাঠটির সাহায্য লওয়া হয়।

উপপাঠ। যদি $a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \dots \quad (1)$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \dots \quad (2)$ হয়,

এবং যদি $a_1b_2 - a_2b_1$ এর মান শূন্য না হয়,

$$\text{তবে } \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \dots \quad (3)$$

প্রমাণ। তৃতীয় প্রণালীর সাহায্যে x ও y এর মান নির্ণয় করিয়া লও।

(1) কে b_2 দ্বারা এবং (2) কে b_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$a_1b_2x + b_1b_2y + c_1b_2 = 0$$

$$a_2b_1x + b_2b_1y + c_2b_1 = 0$$

বিয়োগ করিয়া, $(a_1b_2 - a_2b_1)x + c_1b_2 - c_2b_1 = 0$

$$\therefore (a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$\therefore x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \dots \quad (4)$$

আবার, (1) কে a_2 দ্বারা এবং (2) কে a_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2 = 0$$

$$a_2a_1x + b_2a_1y + c_2a_1 = 0$$

বিয়োগ করিয়া, $(b_1a_2 - b_2a_1)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$

$$\therefore (a_1b_2 - a_2b_1)y = c_1a_2 - c_2a_1$$

$$\therefore y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \dots \quad (5)$$

$\therefore$ (4) এবং (5) হইতে,

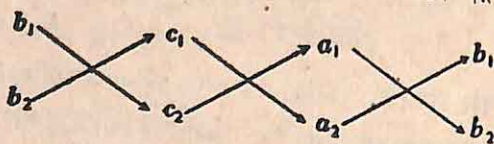
$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{এবং} \quad \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

মন্তব্য। $a_1b_2 - a_2b_1$ এর মান 0 হইলে (3) চিহ্নিত ফলাটি অসিদ্ধ হইবে এবং এরূপস্থলে সমীকরণদ্বয়ের সমাধান অসম্ভব হইবে।

নিম্নলিখিত নিয়মের সাহায্যে হর তিনটি নির্ণয় করা যায়।

নিয়ম। নিম্নের চিত্রানুযায়ী সমীকরণ দুইটির সহগগুলিকে পর পর লিখিয়া যাও।



চিত্রে তিন জোড়া তীর রহিয়াছে এবং প্রত্যেক তীরের প্রত্যেক প্রান্তে একটি করিয়া সংখ্যা রহিয়াছে। তীরচিহ্নানুসারে (b_1c_2, b_2c_1) , (c_1a_2, c_2a_1) , (a_1b_2, a_2b_1)

এই তিন জোড়া গুণফল লও। প্রত্যেক জোড়ার তীর-প্রদর্শিত নিম্নগামী গুণফলটি হইতে উর্ধ্বগামী গুণফলটি বিয়োগ কর। তাহা হইলে নিম্নের রাশিত্রয় পাওয়া যাইবে :

$$b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1 \dots (6)$$

এই রাশিত্রয়ই যথাক্রমে x , y ও 1 লববিশিষ্ট ভগ্নাংশত্রয়ের হর হইবে।

এই নিয়মটিকে **বক্রগুণন** (Cross-multiplication) বলে।

মন্তব্য। (4) ও (5) হইতে দেখা যায়, (6) চিহ্নিত রাশিত্রয়ের প্রথম ও তৃতীয়কে যথাক্রমে লব ও হর ধরিলে x এর মান পাওয়া যায় এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়কে যথাক্রমে লব ও হর ধরিলে y এর মান পাওয়া যায়। রাশি তিনটি মুখস্থ থাকিলে x এবং y এর মান মুখে মুখে বলা চলে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $2x - 3y = -5$,

$$5x - y = 7.$$

পক্ষান্তর করিয়া, $2x - 3y + 5 = 0$

$$5x - y - 7 = 0$$

$$\therefore \frac{x}{(-3)(-7) - (-1) \times 5} = \frac{y}{5 \times 5 - (-7) \times 2} = \frac{1}{2 \times (-1) - 5 \times (-3)}$$

$$\text{বা } \frac{x}{21 + 5} = \frac{y}{25 + 14} = \frac{1}{-2 + 15},$$

$$\text{বা } \frac{x}{26} = \frac{y}{39} = \frac{1}{13}$$

$$\therefore x = \frac{26}{13} = 2, y = \frac{39}{13} = 3.$$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $5x + 6y = 3, 2x + 3y = 0.$

সমীকরণদ্বয় যথাক্রমে, $5x + 6y - 3 = 0$

$$2x + 3y + 0 = 0$$

$$\therefore \frac{x}{0 + 9} = \frac{y}{-6 - 0} = \frac{1}{15 - 12},$$

$$\text{বা } \frac{x}{9} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x = \frac{9}{3} = 3, y = \frac{-6}{3} = -2.$$

প্রশ্নমালা 49

সমাধান কর (Solve) :

1. $2x + 3y - 13 = 0,$
 $3x - 4y + 6 = 0.$

2. $3x - 2y - 13 = 0,$
 $5x + 4y - 7 = 0.$

3. $5x + 7y - 11 = 0,$
 $3x - y + 9 = 0.$

4. $6x - 5y + 2 = 0,$
 $5x - y - 11 = 0.$

$$5. \quad 7x - 3y + 13 = 0, \\ 4x + 5y - 6 = 0.$$

$$6. \quad 6x + 7y - 5 = 0, \\ 5x - 4y - 14 = 0.$$

$$7. \quad 5x - 9y = 4, \\ 6y + 7x + 13 = 0.$$

$$8. \quad 3y + 10x + 3 = 0, \\ 8y - 7x = -8.$$

$$9. \quad 11x + 7y - 5 = 0, \\ 3y + 4x = 0.$$

$$10. \quad 10x - 13y = 11, \\ 3x - 5y = 0.$$

$$11. \quad 3x + 20 = 4y - 10, \\ 4(x - 1) = 3(y - 3).$$

$$12. \quad 10x - 7y = 4x + 2, \\ 7x + 4y = 13y - 1.$$

(C. U. 1895)

(C. U. 1860)

$$13. \quad \frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2, \quad \frac{x}{14} + \frac{y}{18} = 1.$$

(C. U. 1876)

$$14. \quad a(x+y) = b(x-y) = 2ab.$$

(C. U. 1930)

সরল সমীকরণটিত প্রশাবলী

58. একটি সরল সমীকরণ সমাধান করিলে অজ্ঞাত রাশিটির একটি মাত্র মান পাওয়া যায়। সুতরাং কোনও প্রশ্নে একটি মাত্র নির্ণেয় রাশি থাকিলে, প্রশ্নের সর্তাহসারে ঐ রাশি দ্বারা একটি সরল সমীকরণ গঠিত করিয়া লইতে হয়।

(1) সংখ্যা

উদাহরণ 1. দুইটি ক্রমিক বিযুগ সংখ্যার ছোটটির এক-তৃতীয়াংশ, বড়টির এক-পঞ্চমাংশ অপেক্ষা 4 অধিক। সংখ্যা দুইটি কত?

x পূর্ণসংখ্যা হইলে, স্পষ্টতঃই $2x$ একটি যুগ সংখ্যা; সুতরাং $2x+1$ একটি বিযুগ সংখ্যা। সুতরাং

$2x+1$ এর অব্যবহিত পরবর্তী বিযুগ সংখ্যাটি $2x+1+2$ বা $2x+3$ । অতএব প্রদত্ত সর্তাহসারে,

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{2x+3}{5} = 4,$$

$$\text{বা } 10x+5-6x-9=60,$$

[ল. সা. গু. 15 দ্বারা গুণ করিয়া]

$$\text{বা } 10x-6x=60-5+9,$$

[পক্ষান্তর করিয়া]

$$\text{বা } 4x=64, \therefore x=16$$

$$\therefore 2x+1=33 \text{ এবং } 2x+3=35$$

$$\therefore \text{সংখ্যা দুইটি } 33 \text{ এবং } 35.$$

মন্তব্য। নির্ণেয় সংখ্যা দুইটিকে x এবং $x+2$ ধরিয়া কষিলেও সঠিক উত্তর পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 2. এক রাজা 28 বৎসর বয়সে রাজত্ব আরম্ভ করেন এবং জীবনের $\frac{1}{5}$ অংশ সময় রাজত্ব করেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করিয়াছিলেন?

রাজা যেন x বৎসর রাজত্ব করিয়াছিলেন। তাহা হইলে তিনি $(28+x)$ বৎসর জীবিত ছিলেন।

$$\therefore \text{সর্তাহুসারে, } x = \frac{1}{5}(28+x),$$

$$\text{বা } 15x = 224 + 8x, \text{ বা } 7x = 224 \therefore x = 32$$

$$\therefore \text{তিনি 32 বৎসর রাজত্ব করিয়াছিলেন।}$$

(2) অঙ্ক (Digit)

উদাহরণ 3. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশকাক্ষট এককাক্ষের দ্বিগুণ এবং সংখ্যাটি হইতে 36 বিয়োগ করিলে সংখ্যাটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি কত? (C. U. 1946)

সংখ্যাটির এককাক্ষ যেন x । তাহা হইলে প্রথম সর্তাহুসারে দশকাক্ষ $2x$;

$$\therefore \text{নির্ণেয় সংখ্যাটি } 10 \times 2x + x \text{ বা } 21x$$

$$\text{এবং উল্টা সংখ্যাটি } 10 \times x + 2x \text{ বা } 12x.$$

$$\therefore \text{দ্বিতীয় সর্তাহুসারে, } 21x - 36 = 12x,$$

$$\text{বা } 9x = 36 \therefore x = 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সংখ্যাটি } = 21x = 21 \times 4 = 84.$$

(3) সময় ও দূরত্ব

উদাহরণ 4. এক পুলিশ এক চোরকে 60 মিটার দূরে দেখিতে পাইয়া তাহার পিছনে দৌড়িল। প্রতি সেকেণ্ডে পুলিশ 9 মিটার এবং চোর $7\frac{1}{2}$ মিটার দৌড়িতে লাগিল। কত সময়ে এবং কত মিটার দৌড়িয়া পুলিশ চোরকে ধরিবে?

মনে কর যেন পুলিশ চোরকে x সেকেণ্ডে ধরিবে। এই x সেকেণ্ডে পুলিশ দৌড়িবে $9x$ মিটার এবং চোর দৌড়িবে $7\frac{1}{2} \times x$ বা $\frac{15}{2}x$ মিটার; কিন্তু চোরকে ধরিতে হইলে পুলিশকে 60 মিটার অধিক দৌড়িতে হইবে।

$$\therefore 9x - \frac{15}{2}x = 60,$$

$$\text{বা } 18x - 15x = 120 \therefore x = 40$$

$$\therefore \text{পুলিশ 40 সেকেণ্ডে এবং } 9x \text{ মিটার বা 360 মিটার দৌড়িয়া চোরকে ধরিবে।}$$

(4) গতিবেগ

উদাহরণ 5. একখানি ট্রেন 176 মিটার দীর্ঘ একটি স্টেশন 30 সেকেণ্ডে এবং 308 মিটার দীর্ঘ একটি স্টেশন 39 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেনখানির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ কত?

ট্রেনখানির দৈর্ঘ্য যেন x মিটার। 30 সেকেণ্ডে ট্রেনখানি উহার নিজের দৈর্ঘ্য x মিটার এবং স্টেশনটির দৈর্ঘ্য 176 মিটার, মোট $(x+176)$ মিটার অতিক্রম

করিয়েছে ; সুতরাং 1 সেকেন্ডে ট্রেনখানি অতিক্রম করিয়েছে $\frac{1}{30}(x+176)$ মিটার।
অনুরূপে, 1 সেকেন্ডে ট্রেনখানি অতিক্রম করিয়েছে $\frac{1}{30}(x+308)$ মিটার। ট্রেনখানির
গতিবেগ উভয় স্থলে সমান বলিয়া, এক এক সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দৈর্ঘ্য দুইটিও সমান।

$$\therefore \frac{1}{30}(x+176) = \frac{1}{30}(x+308), \quad \dots (1)$$

$$\text{বা } 39(x+176) = 30(x+308),$$

$$\text{বা } 39x + 6864 = 30x + 9240,$$

$$\text{বা } 9x = 2376 \quad \therefore x = 264$$

$$\therefore \text{ট্রেনখানির দৈর্ঘ্য} = 264 \text{ মিটার।}$$

আবার (1) হইতে, 1 সেকেন্ডে ট্রেনখানি অতিক্রম করে $\frac{1}{30}(x+176)$ মিটার

$$\therefore 1 \text{ ঘণ্টায় অতিক্রম করে } \frac{440}{30} \times 60 \times 60 \text{ মিটার বা } 52800 \text{ মিটার।}$$

$$\therefore \text{ট্রেনখানির গতিবেগ ঘণ্টায় } 52 \text{ কিলোমিটার } 800 \text{ মিটার।}$$

(5) ক্ষেত্রফল

উদাহরণ 6. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের দ্বিগুণ। যদি ঘরটির দৈর্ঘ্য 3 মিটার
কম এবং প্রস্থ 3 মিটার বেশী হইত, তবে উহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গ মিটার বেশী হইত।
ঘরটির দৈর্ঘ্য কত ?

ঘরটির প্রস্থ যেন x মিটার। তাহা হইলে উহার দৈর্ঘ্য $= 2x$ মিটার এবং ক্ষেত্রফল
 $= 2x \cdot x$ বা $2x^2$ বর্গ মিটার।

ঘরটির দৈর্ঘ্য 3 মিটার কম হইলে দৈর্ঘ্য হইত $(2x-3)$ মিটার এবং প্রস্থ 3 মিটার
বেশী হইলে প্রস্থ হইত $(x+3)$ মিটার। তাহা হইলে ক্ষেত্রফল হইত $(2x-3)(x+3)$
বর্গ মিটার। অতএব সতাহসারে,

$$2x^2 + 21 = (2x-3)(x+3),$$

$$\text{বা } 2x^2 + 21 = 2x^2 + 3x - 9,$$

$$\text{বা } 3x = 30 \quad \therefore x = 10 \text{ এবং } 2x = 20$$

$$\therefore \text{ঘরটির দৈর্ঘ্য} = 20 \text{ মিটার।}$$

(6) মিশ্রণ

5 লিটার দুধের সহিত 3 লিটার জল মিশ্রিত করিলে, 8 লিটার জলমিশ্রিত দুধে
5 লিটার দুধ এবং 3 লিটার জল থাকিবে। সুতরাং প্রতি লিটার জলমিশ্রিত দুধে $\frac{5}{8}$
লিটার দুধ এবং $\frac{3}{8}$ লিটার জল থাকিবে।

উদাহরণ 7. প্রথম পাত্রে 24 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 16 লিটার দুধ আছে এবং
দ্বিতীয় পাত্রে 20 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 5 লিটার জল আছে। কোন পাত্র হইতে
কত লিটার জলমিশ্রিত দুধ লইয়া 28 লিটারের একটি পাত্র পূর্ণ করিলে উৎপন্ন মিশ্রিত
পদার্থে 20 লিটার দুধ থাকিবে ?

মনে কর, প্রথম পাত্র হইতে x লিটার এবং কাজেই দ্বিতীয় পাত্র হইতে $(28-x)$
লিটার জলমিশ্রিত দুধ লইতে হইবে।

প্রথম পাত্রের x লিটারে $\frac{1}{5}x$ বা $\frac{2}{5}x$ লিটার দুধ আছে এবং দ্বিতীয় পাত্রের $(28-x)$ লিটারে $\frac{1}{5}(28-x)$ বা $\frac{3}{5}(28-x)$ লিটার দুধ আছে।

$$\therefore \text{সর্তালুসারে, } \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}(28-x) = 20,$$

$$\text{বা } 8x + 9(28-x) = 240,$$

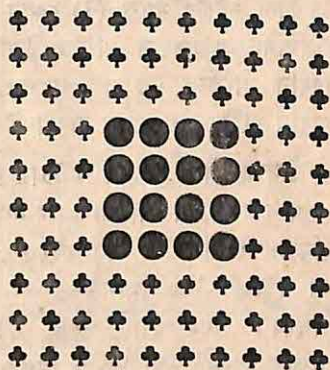
$$\text{বা } -x = -12 \therefore x = 12$$

$\therefore$ প্রথম পাত্র হইতে 12 লিটার এবং দ্বিতীয় পাত্র হইতে $(28-x)$ বা 16 লিটার জলমিশ্রিত দুধ লইতে হইবে।

(7) বর্গাকারে লোক সন্নিবেশ

যদি x -সংখ্যক সমান্তরাল সারির প্রতি সারিতে x -সংখ্যক লোক সাজান যায়, তবে ঐ লোকগুলিকে নিরেট বর্গাকারে (Solid square) সাজান হইয়াছে বলা হয় এবং ঐ লোকগুলির সংখ্যা হয় $x \times x$ বা x^2 ।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে প্রত্যেকটি ফুল এবং মটর এক একটি লোকের অবস্থিতি নির্দেশ করিতেছে। প্রতি সারিতে 10 জন করিয়া 10 সারিতে মোট 10^2 জন লোক একটি নিরেট বর্গাকারে সজ্জিত রহিয়াছে। মটর চিহ্নিত স্থানসমূহের লোকগুলিকে যদি



অপসারিত করা যায়, তবে নিরেট বর্গটি 3-গভীরতাবিশিষ্ট (3-deep) একটি ফাঁপা বর্গে (Hollow square) পরিণত হইবে। প্রতি সারিতে $(10-2 \times 3)$ জন করিয়া $(10-2 \times 3)$ সারি লোক অপসারিত হওয়ায় অপসারিত লোকের সংখ্যা হইবে $(10-2 \times 3)^2$ এবং ফাঁপা বর্গটির লোকসংখ্যা হইবে $10^2 - (10-2 \times 3)^2$ । এইরূপ a -গভীরতাবিশিষ্ট কোন ফাঁপা বর্গের সম্মুখ সারির লোকসংখ্যা x হইলে উহার লোকসংখ্যা হইবে $x^2 - (x-2a)^2$ ।

উদাহরণ 8. এক সেনাপতি তাঁহার সেনাগণকে 3-গভীরতাবিশিষ্ট ফাঁপা বর্গাকারে সাজাইতে পারেন। যদি তাঁহার 2472 জন সেনা অধিক থাকিত, তবে তিনি 6-গভীরতাবিশিষ্ট এমন ফাঁপা বর্গাকারে সাজাইতে পারিতেন, যাহার সম্মুখ সারিতে পূর্বাংশ 4 জন সেনা অধিক থাকিত। সেনাসংখ্যা কত?

মনে কর, প্রথম সন্নিবেশের প্রথম সারির সেনাসংখ্যা $= x$; তাহা হইলে প্রথম সর্তালুসারে উহার সেনাসংখ্যা $= x^2 - (x-2 \times 3)^2 = x^2 - (x-6)^2 = 12x - 36 \dots (1)$

আবার, দ্বিতীয় সন্নিবেশের প্রথম সারির সেনাসংখ্যা $= x+4$; তাহা হইলে উহার মোট সেনাসংখ্যা $= (x+4)^2 - \{(x+4)-2 \times 6\}^2 = (x+4)^2 - (x-8)^2 = 24x - 48 \dots (2)$

কিন্তু সর্তারুসারে প্রথম সমিবেশের সেনাসংখ্যা অপেক্ষা দ্বিতীয় সমিবেশের সেনাসংখ্যা 2472 অধিক ; অতএব,

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ হইতে, } 12x - 36 + 2472 = 24x - 48,$$

$$\text{বা } -12x = -2484 \therefore x = 207$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে, নির্ণয় সেনাসংখ্যা} = 12 \times 207 - 36 = 2448.$$

(8) ঘড়ি

60 মিনিটে মিনিটের কাঁটা 60 মিনিট-ঘর গেলে ঘণ্টার কাঁটা যায় 5 মিনিট-ঘর।

$\therefore$ মিনিটের কাঁটা 1 মিনিট-ঘর গেলে ঘণ্টার কাঁটা যায় $\frac{1}{12}$ মিনিট-ঘর

$\therefore \dots \dots x \dots \dots \dots \frac{1}{12}x \dots$

কাঁটা দুইটির মাঝে (1) কোন ব্যবধান না থাকিলে উহারা উপযুক্ত থাকে, (2) 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকিলে উহারা সমকোণে বা লম্বভাবে থাকে, (3) 30 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকিলে উহারা পরস্পরের বিপরীত দিকে থাকে এবং (4) 30 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকিলে বা কোন ব্যবধানই না থাকিলে উহারা এক সরলরেখায় থাকে।

উদাহরণ 9. 2টা ও 3টার ভিতর ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন উপযুক্ত থাকিবে ?

মনে কর, 2টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি উপযুক্ত থাকিবে। ঐ সময় মিনিটের কাঁটা XII দাগ হইতে x মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে এবং ঘণ্টার কাঁটা II দাগ হইতে $\frac{1}{12}x$ মিনিট-ঘর বা XII দাগ হইতে $(10 + \frac{1}{12}x)$ মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে। যখন কাঁটা দুইটি XII দাগ হইতে সমান সংখ্যক মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে, তখনই উহারা উপযুক্ত থাকিবে।

$$\therefore x = 10 + \frac{1}{12}x, \text{ বা } 11x = 120 \therefore x = 10\frac{10}{11}$$

$\therefore$ 2টা বাজিয়া $10\frac{10}{11}$ মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি উপযুক্ত থাকিবে।

উদাহরণ 10. 5টা ও 6টার ভিতর ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমকোণে থাকিবে ?

মনে কর, 5টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি সমকোণে থাকিবে। ঐ সময় মিনিটের কাঁটা XII দাগ হইতে x মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে এবং ঘণ্টার কাঁটা V দাগ হইতে $\frac{1}{12}x$ মিনিট-ঘর বা XII দাগ হইতে $(25 + \frac{1}{12}x)$ মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে।

(1) যখন ঘণ্টার কাঁটা মিনিটের কাঁটা অপেক্ষা 15 মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে, তখন কাঁটা দুইটি প্রথমবার সমকোণে থাকিবে।

$$\therefore (25 + \frac{1}{12}x) - x = 15,$$

$$\text{বা } 300 + x - 12x = 180,$$

$$\text{বা } -11x = -120 \therefore x = 10\frac{10}{11}.$$

(2) যখন মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 15 মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে, তখন কাঁটা দুইটি দ্বিতীয়বার সমকোণে থাকিবে।

$$\therefore x - (25 + \frac{1}{12}x) = 15,$$

$$\text{বা } 12x - 300 - x = 180,$$

$$\text{বা } 11x = 480 \quad \therefore x = 43\frac{7}{11}$$

$\therefore$ 5টা $10\frac{9}{11}$ ও $43\frac{7}{11}$ মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি সমকোণে থাকিবে।

উদাহরণ 11. ঘড়ির কাঁটা দুইটি কত সময় পর পর একত্র হয়?

ঠিক 12টার সময় কাঁটা দুইটি একবার একত্র হয়। ইহার পর 1টা ও 2টার ভিতর উহারা আর একবার একত্র হইবে।

মনে কর, যেন 1টা বাজিয়া x মিনিটের সময় উহারা একত্র হইবে। ঐ সময় মিনিটের কাঁটা XII দাগ হইতে x মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে এবং ঘণ্টার কাঁটা I দাগ হইতে $\frac{1}{12}x$ মিনিট-ঘর বা XII দাগ হইতে $(5 + \frac{1}{12}x)$ মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে। যখন কাঁটা দুইটি XII দাগ হইতে সমান সংখ্যক মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে তখনই উহারা একত্র হইবে।

$$\therefore x = 5 + \frac{1}{12}x, \text{ বা } 12x = 60 + x \quad \therefore x = 5\frac{5}{11}$$

$\therefore$ 12টা বাজিবার পর 1টা $5\frac{5}{11}$ মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি একত্র হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় 1 ঘণ্টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট।

প্রশ্নমালা 50

1. কোন্ অখণ্ড সংখ্যার $\frac{1}{2}$ উহার অব্যবহিত পরবর্তী অখণ্ড সংখ্যার $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা 3 অধিক?

2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 61 এবং প্রথমটির দ্বিগুণ দ্বিতীয়টির দুই-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 10 অধিক। সংখ্যা দুইটি কত? (D. B. 1942)

3. দুইটি ক্রমিক বিযুক্ত সংখ্যার বড়টির এক-তৃতীয়াংশ ছোটটির এক-পঞ্চমাংশ অপেক্ষা 4 অধিক; সংখ্যা দুইটি কত?

4. দুইটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার বর্গের অন্তর 44; সংখ্যা দুইটি কত?

5. 20 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের দ্বিগুণের সহিত দ্বিতীয় অংশের তিন গুণ যোগ করিলে যোগফল 47 হয়।

6. 36 কে এমন তিন অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে এবং তৃতীয় অংশকে 3 দিয়া গুণ করিলে প্রাপ্ত ফলগুলি পরস্পর সমান হয়। [প্রথম অংশ + 1 = দ্বিতীয় অংশ - 2 = তৃতীয় অংশ $\times 3 = x$ ধর; $\therefore (x-1) + (x+2) + \frac{1}{3}x = 36.$]

7. 58 কে এমন চারি অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 দিয়া গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দিয়া ভাগ করিলে প্রাপ্ত ফলগুলি পরস্পর সমান হয়।

8. এক সম্রাট 30 বৎসর বয়সে রাজত্ব আরম্ভ করিলেন এবং জীবনের $\frac{1}{11}$ অংশ সময় রাজত্ব করিলেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করিলেন? (C. U. 1930)

9. প্রত্যেক বালককে 37½ পয়সা এবং প্রত্যেক বালিকাকে 50 পয়সা দিলে 100 জন বালকবালিকাকে দিতে 42 টাকা লাগে। বালিকার সংখ্যা কত?

10. কোন গ্রামের লোকসংখ্যা 20000 ; যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বেশী হইত এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% কম হইত, তবে লোকসংখ্যা ঠিকই থাকিত। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা কত? (C. U. 1937)

11. এক ব্যক্তির যত টাকা ঋণ ছিল, তাহার $\frac{1}{3}$ ও 200 টাকা পরিশোধ করিয়া দেখিল, তখনও তাহার সমুদয় ঋণের $\frac{1}{3}$ ও 410 টাকা ঋণ রহিয়াছে। ঐ ব্যক্তির প্রথমে কত টাকা ঋণ ছিল? (C. U. 1913)

12. এক চোর যত টাকা চুরি করিল, তাহার $\frac{1}{2}$ ও 1 টাকা প্রথম প্রহরীকে দিল ; তৎপর বাহা বাকী রহিল, তাহার $\frac{1}{2}$ ও 1 টাকা দ্বিতীয় প্রহরীকে দিয়া দেখিল তাহার নিকট 25 টাকা রহিয়াছে। ঐ চোর কত টাকা চুরি করিয়াছিল?

13. এক খলিয়ায় যত টাকা আছে, তাহার তিন গুণ 50-পয়সা ও পাঁচ গুণ 25-পয়সা আছে ; খলিয়াতে সর্বমুদ্র 75 টাকা মূল্যের মুদ্রা থাকিলে, প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কত?

14. এক মজুর 30 দিনের জন্ম এই সর্তে কাজে নিযুক্ত হইল যে, কাজ করিলে প্রতিদিন সে 2 টাকা 50 পয়সা মজুরি পাইবে কিন্তু কাজ না করিলে মজুরি পাওয়া দূরের কথা, প্রতিদিনের জন্ম তাহাকে 1 টাকা 50 পয়সা করিয়া ক্ষতিপূরণ দিতে হইবে। সে মোট 59 টাকা পাইয়া থাকিলে, কত দিন সে কাজ করিয়াছিল?

15. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির যোগফল 5 ; সংখ্যাটির সহিত 9 যোগ করিলে সংখ্যাটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি কত? (C. U. 1952)

16. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশকান্ধটি এককান্ধের 3 গুণ। সংখ্যাটি হইতে 54 বিয়োগ করিলে সংখ্যাটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি কত? (C. U. 1943)

17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির যোগফল 11 ; দশকান্ধটির সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির $\frac{1}{3}$ হয়। সংখ্যাটি কত? (C. U. 1936)

18. তিনটি পর পর ক্রমিক অঙ্ক দ্বারা গঠিত একটি সংখ্যার এবং উহার উল্টা সংখ্যাটির অন্তর বৃহত্তর অঙ্কটির 33 গুণ। সংখ্যাটি কত? (C. U. 1939)

19. ঘণ্টায় 3 কি. মি. করিয়া চলিলে কোন স্থানে যাইতে যত সময় লাগে, ঘণ্টায় 4 কি. মি. করিয়া চলিলে তাহা অপেক্ষা 4 ঘণ্টা সময় কম লাগে। স্থানটির দূরত্ব কত?

20. একখানি ট্রেন ঘণ্টায় 42 কিলোমিটার করিয়া চলিলে গন্তব্য স্থানে ঠিক সময়ে পৌঁছিতে পারে। ঘণ্টায় 40 কিলোমিটার করিয়া চলিলে গন্তব্য স্থানে পৌঁছিতে 15 মিনিট বিলম্ব হয়। গন্তব্য স্থানের দূরত্ব কত?

21. এক পুলিশ এক চোরকে 100 মিটার দূরে দেখিতে পাইয়া তাহার পিছনে ছুটিল। যদি প্রতি মিনিটে চোর 176 মিটার এবং পুলিশ 293½ মিটার দৌড়ায়, তবে চোর আর কত মিটার গেলে পর পুলিশ তাহাকে ধরিবে?

22. এক মোটর গাড়ীর চালক 6 ঘণ্টায় 80 কিলোমিটার গেল। কিছু পথ সে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার হিসাবে এবং বাকী পথ সে ঘণ্টায় 18 কিলোমিটার হিসাবে গেল। কোন্ গতিতে সে কত কিলোমিটার গেল?

23. একখানা ট্রেন 125 মিটার দীর্ঘ একটি প্ল্যাটফর্ম 16 সেকেন্ডে এবং 75 মিটার দীর্ঘ আর একটি প্ল্যাটফর্ম 12 সেকেন্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেনখানার দৈর্ঘ্য এবং প্রতি ঘণ্টায় গতিবেগ কত?

24. এক ব্যক্তি স্থির জলে দাঁড় বাহিয়া ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার যাইতে পারে। স্রোতের অল্পকূলে দাঁড় টানিয়া 40 কিলোমিটার যাইতে তাহার যে সময় লাগিল, স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় টানিয়া ঐ পথ যাইতে তাহার তিন গুণ সময় লাগিল। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার?

25. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের দ্বিগুণ। উহা অপেক্ষা দৈর্ঘ্যে 2 মিটার বেশী এবং প্রস্থে 2 মিটার কম আর একটি ঘরের ক্ষেত্রফল পূর্বোক্ত ঘরের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা 28 বর্গ মিটার কম। পূর্বোক্ত ঘরের দৈর্ঘ্য কত?

26. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থ অপেক্ষা 5 মিটার অধিক। যদি উহার প্রস্থ 3 মিটার কম এবং দৈর্ঘ্য 4 মিটার বেশী হইত, তবে উহার ক্ষেত্রফল 12 বর্গ মিটার কম হইত। ঘরটির দৈর্ঘ্য কত?

27. 30 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 24 লিটার দুধ আছে এবং 25 লিটার জলমিশ্রিত দুধে 10 লিটার জল আছে। কোন্ পাত্র হইতে কত লিটার জলমিশ্রিত দুধ লইয়া 35 লিটারের একটি পাত্র পূর্ণ করিলে উৎপন্ন মিশ্রিত পদার্থে 25 লিটার দুধ থাকিবে?

28. এক সেনাপতি তাহার সেনাগণকে 5-গভীরতাবিশিষ্ট ফাঁপা বর্গাকারে সাজাইলেন। যদি মোট সেনাসংখ্যা 1900 হয়, তবে সামনের সারির সেনাসংখ্যা কত? (C. U. 1938)

29. এক সৈন্যদল তাহার সৈন্যগণকে 3-গভীরতাবিশিষ্ট ফাঁপা বর্গাকারে সাজাইতে পারেন; যদি তাহার 800 সৈন্য অধিক থাকিত, তবে তিনি সামনের সারিতে একই সংখ্যক সৈন্য রাখিয়া 4-গভীরতাবিশিষ্ট ফাঁপা বর্গাকারে সাজাইতে পারিতেন। সৈন্যদলে সৈন্যসংখ্যা কত? (C. U. 1942)

30. 7টা ও 8টার ভিতর ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন উপযুগ্ম থাকিবে?

31. 3টা ও 4টার ভিতর ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন একই সরলরেখায় বিপরীত দিকে থাকিবে? (C. U. 1934)

32. 4টা ও 5টার ভিতর ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমকোণে থাকিবে?

33. কত সময় পর পর ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্র হয়?

34. এক ব্যক্তি প্রতিটি 8 পয়সা হিসাবে যতটি আম ক্রয় করিল, প্রতিটি 5 পয়সা হিসাবে ঠিক ততটি আম ক্রয় করিল। যদি সমুদয় অর্থ সমানভাবে ব্যয় করিয়া দুই প্রকারের আম ক্রয় করিত, তবে সে 9টি আম অধিক পাইত। প্রত্যেক প্রকারের আম সে কয়টি কিনিয়াছিল?

সহ-সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী

59. দ্বিঘণ সহ-সমীকরণ দ্বারা সমাধানযোগ্য বিভিন্ন প্রকারের প্রশ্ন সমাধান করিবার প্রশ্নালী কতকগুলি উদাহরণ দ্বারা প্রদর্শিত হইল।

(1) সংখ্যা

উদাহরণ 1. কতকগুলি মার্বেল কতিপয় বালকের ভিতর সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। 2টি বালক কম হইলে প্রত্যেকে 2টি মার্বেল বেশী পাইত এবং 3টি বালক বেশী হইলে প্রত্যেকে 2টি মার্বেল কম পাইত। বালকের সংখ্যা ও মার্বেলের সংখ্যা নির্ণয় কর।

মনে কর, বালকের সংখ্যা = x এবং প্রত্যেক বালকের প্রাপ্ত মার্বেলের সংখ্যা = y . তাহা হইলে মোট মার্বেলের সংখ্যা = xy .

$$\text{প্রথম সর্তাহুসারে, } (x-2)(y+2)=xy \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় সর্তাহুসারে, } (x+3)(y-2)=xy \quad \dots \quad (2)$$

$$(1) \text{ হইতে, } xy+2x-2y-4=xy, \text{ বা } x-y=2 \quad \dots \quad (3)$$

$$(2) \text{ হইতে, } xy-2x+3y-6=xy, \text{ বা } -2x+3y=6 \quad \dots \quad (4)$$

$$(3) \text{ কে } 3 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } 3x-3y=6 \quad \dots \quad (5)$$

$$(4) \text{ ও } (5) \text{ যোগ করিয়া, } x=12$$

$$\therefore (3) \text{ হইতে, } 12-y=2 \therefore y=10$$

$$\therefore \text{ বালকের সংখ্যা } = 12 \text{ এবং মার্বেলের সংখ্যা } = xy = 12 \cdot 10 = 120.$$

(2) অঙ্ক

উদাহরণ 2. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল দশকস্থানীয় অঙ্কের 3 গুণ হয় এবং সংখ্যাটি হইতে 2 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল এককস্থানীয় অঙ্কের 7 গুণ হয়। সংখ্যাটি কত?

মনে কর, x দশকস্থানীয় এবং y এককস্থানীয় অঙ্ক :

তাহা হইলে প্রথম সর্তাহুসারে,

$$x+y+2=3x, \text{ বা } -2x+y=-2 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় সর্তাহুসারে, } 10x+y-2=7y, \text{ বা } 10x-6y=2 \quad \dots \quad (2)$$

$$(1) \text{ কে } 5 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } -10x+5y=-10 \quad \dots \quad (3)$$

$$(2) \text{ ও } (3) \text{ যোগ করিয়া, } -y=-8 \therefore y=8$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে, } -2x+8=-2 \therefore x=5$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যা } = 58.$$

(3) বয়স

উদাহরণ 3. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল। 5 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 2 গুণ হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত?

মনে কর, পিতার বর্তমান বয়স x বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স y বৎসর।

$$\therefore \text{প্রথম সর্তাহুসারে, } x-10=3(y-10), \text{ বা } x-3y=-20 \dots (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় সর্তাহুসারে, } x+5=2(y+5), \text{ বা } x-2y=5 \dots (2)$$

$$(2) \text{ হইতে } (1) \text{ বিয়োগ করিয়া, } y=25$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে, } x-3 \times 25=-20 \therefore x=55$$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স 55 বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 25 বৎসর।

(4) ভগ্নাংশ

উদাহরণ 4. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 ও হরের সহিত 2 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{2}{3}$ এর সমান হয় এবং ভগ্নাংশটির লব হইতে 7 এবং হর হইতে 8 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি কত?

মনে কর, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর y ; তাহা হইলে,

$$\text{প্রথম সর্তাহুসারে, } \frac{x+1}{y+2}=\frac{2}{3}, \text{ বা } 3x-2y=1 \dots (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় সর্তাহুসারে, } \frac{x-7}{y-8}=\frac{1}{2}, \text{ বা } 2x-y=6 \dots (2)$$

$$(2) \text{ কে } 2 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } 4x-2y=12 \dots (3)$$

$$(3) \text{ হইতে } (1) \text{ বিয়োগ করিয়া, } x=11$$

$$\therefore (2) \text{ হইতে, } 2 \times 11-y=6 \therefore y=16$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভগ্নাংশ}=\frac{11}{16}$$

মন্তব্য। উত্তর যদি লঘিষ্ঠ আকারবিশিষ্ট ভগ্নাংশ না হয়, তবে তাহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিবে/না, কারণ এরূপে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটি প্রশ্নে প্রদত্ত সর্তগুলি পূরণ করিবে না।

(5) ক্ষেত্রফল

উদাহরণ 5. একটি আয়তাকার ঘরের সীমাফল 66 মিটার। ঘরটির দৈর্ঘ্য 2 মিটার বেশী এবং প্রস্থ 3 মিটার কম হইলে ঘরটির ক্ষেত্রফল 30 বর্গ মিটার কম হইত। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

মনে কর, ঘরটির দৈর্ঘ্য= x মিটার এবং প্রস্থ= y মিটার। তাহা হইলে উহার ক্ষেত্রফল= xy বর্গ মিটার।

$$\text{প্রথম সর্তাহুসারে, } 2(x+y)=66, \text{ বা } x+y=33 \dots (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় সর্তাহুসারে, } (x+2)(y-3)=xy-30, \\ \text{বা } -3x+2y=-24 \dots (2)$$

$$(1) \text{ কে } 3 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া, } 3x+3y=99 \dots (3)$$

$$(2) \text{ ও } (3) \text{ যোগ করিয়া, } 5y=75 \therefore y=15$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে, } x+15=33 \therefore x=18$$

$$\therefore \text{ঘরটির দৈর্ঘ্য } 18 \text{ মিটার এবং প্রস্থ } 15 \text{ মিটার।}$$

(6) সময় ও কার্য

উদাহরণ 6. A ও B একত্রে একটি কাজ 6 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে 3 দিন কাজ করিবার পর A চলিয়া গেল এবং B ঐ কাজ আরও 5 দিনে সম্পন্ন করিল। কাজটি কে কত দিনে পৃথকভাবে সম্পন্ন করিতে পারিত ?

মনে কর, x দিনে A এবং y দিনে B পৃথকভাবে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে। তাহা হইলে 1 দিনে A কাজটির $\frac{1}{x}$ অংশ এবং 1 দিনে B কাজটির $\frac{1}{y}$ অংশ করিতে পারে। সুতরাং 1 দিনে A ও B একত্রে কাজটির $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ অংশ করিবে এবং ইহা প্রথম সর্তাহুসারে কাজের $\frac{1}{6}$ অংশ।

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \quad \dots (1)$$

আবার, A 3 দিন এবং B (3+5) দিন বা 8 দিন কাজ করিলে দ্বিতীয় সর্তাহুসারে কাজটির সমস্ত অংশ শেষ হয়।

$$\therefore \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 1 \quad \dots (2)$$

$$(1) \text{ কে } 3 \text{ দিয়া গুণ করিয়া, } \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2} \quad \dots (3)$$

$$(2) \text{ হইতে } (3) \text{ বিয়োগ করিয়া, } \frac{5}{y} = \frac{1}{2} \therefore y = 10$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে, } \frac{1}{x} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}, \text{ বা } \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \therefore x = 15$$

$\therefore$ A 15 দিনে এবং B 10 দিনে পৃথকভাবে কাজটি করিতে পারিবে।

(7) শ্রোতের বেগ

শ্রোতের বেগ অপেক্ষা দাঁড়ের টানের বেগ অধিক না হইলে কোন নৌকা শ্রোতের প্রতিকূলে যাইতে পারে না। সুতরাং শ্রোতের প্রতিকূলে কোন নৌকা চলিলে, শ্রোতের বেগ অপেক্ষা দাঁড়ের টানের বেগ অধিক বুঝিতে হইবে।

উদাহরণ 7. একজন লোক দাঁড় বাহিয়া শ্রোতের অল্পকূলে 5 ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার গেল এবং শ্রোতের প্রতিকূলে 15 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। দাঁড়ের টানের বেগ ও শ্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, দাঁড়ের টানের বেগ ঘণ্টায় x কিলোমিটার এবং শ্রোতের বেগ ঘণ্টায় y কিলোমিটার। সুতরাং শ্রোতের অল্পকূলে এবং প্রতিকূলে নৌকার বেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় $(x+y)$ এবং $(x-y)$ কিলোমিটার।

$$\therefore \text{ প্রথম সর্তাহুসারে, } \frac{30}{x+y} = 5, \text{ বা } x+y=6 \quad \dots (1)$$

দ্বিতীয় সর্তাভাসারে, $\frac{30}{x-y}=15$, বা $x-y=2 \dots \dots (2)$

(1) ও (2) এর সমষ্টি ও অন্তর লইয়া, $x=4$, $y=2$

∴ দাঁড়ের টানের বেগ ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার এবং শ্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার।

প্রশ্নমালা 51

1. দুইটি সংখ্যার যোগফল 84 এবং বিয়োগফল 30 ; সংখ্যা দুইটি কত ?
2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 100 এবং ভাগফল $\frac{5}{3}$; সংখ্যা দুইটি কত ?
3. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 1200 এবং ভাগফল 81 ; সংখ্যা দুইটি কত ?
4. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের প্রথমটির 2 গুণের সহিত দ্বিতীয়টির 3 গুণ যোগ করিলে যোগফল 51 হয় এবং প্রথমটির 3 গুণ হইতে দ্বিতীয়টির 4 গুণ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 34 হয়।
5. 3 কুইন্টেল চাউল ও 4 কুইন্টেল ডালের মূল্য 288 টাকা এবং 5 কুইন্টেল চাউল ও 2 কুইন্টেল ডালের মূল্য 270 টাকা। 1 কুইন্টেল চাউলের মূল্য ও 1 কুইন্টেল ডালের মূল্য কত ?
6. 9 খানি চেয়ার ও 5 খানি টেবিলের মূল্য 90 টাকা এবং 5 খানি চেয়ার ও 4 খানি টেবিলের মূল্য 61 টাকা। 6 খানি চেয়ার ও 3 খানি টেবিলের মোট মূল্য কত ?
7. A, B কে বলিল, “আমার মাহিনার $\frac{2}{3}$, তোমার মাহিনার $\frac{2}{5}$ এর সমান এবং আমাদের মাহিনার অন্তর 600 টাকা।” Aর মাহিনা কত ? (A. U. 1894)
8. যদু মধুকে বলিল, “যদি আমাকে 5টি মার্বেল দাও, তবে আমার মার্বেলের সংখ্যা তোমার মার্বেলের সংখ্যার $1\frac{1}{2}$ গুণ হইবে। মধু উত্তর করিল, “যদি তুমি আমাকে 5টি মার্বেল দাও, তবে আমার মার্বেলের সংখ্যা তোমার মার্বেলের সংখ্যার 4 গুণ হইবে।” কাহার কয়টি মার্বেল আছে ?
9. কতকগুলি মার্বেল কতিপয় বালককে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। 5টি বালক কম হইলে প্রত্যেকে 5টি করিয়া বেশী পাইত এবং 10টি বালক অধিক হইলে প্রত্যেকে 4টি করিয়া কম পাইত। বালকের সংখ্যা ও মার্বেলের সংখ্যা নির্ণয় কর।
10. কিছু পরিমাণ অর্থ কতিপয় লোককে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। 6 জন লোক বেশী হইলে প্রত্যেকে 1 টাকা কম পাইত এবং 4 জন লোক কম হইলে প্রত্যেকে 1 টাকা বেশী পাইত। অর্থের পরিমাণ ও লোকের সংখ্যা নির্ণয় কর।
11. দুই অক্ষবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অক্ষদ্বয়ের অন্তর 2. ঐ সংখ্যা হইতে অক্ষদ্বয়ের সমষ্টির $1\frac{1}{2}$ গুণ বিয়োগ করিলে উৎপন্ন সংখ্যাটি পূর্বসংখ্যাটির উল্টা হয়। পূর্বসংখ্যাটি কত ? (C. U. 1899)

12. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি ঐ সংখ্যা অপেক্ষা 45 কম। অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে উৎপন্ন সংখ্যাটি পূর্বসংখ্যা অপেক্ষা 9 অধিক হয়। সংখ্যাটি কত ?

13. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা উহার অঙ্কসমষ্টির 8 গুণ এবং সংখ্যাটি হইতে 45 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্বসংখ্যাটির উল্টা হয়। পূর্বসংখ্যাটি কত ?

(C. U. 1919)

14. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা উহার উল্টা সংখ্যাটির $1\frac{1}{2}$ গুণ এবং উহার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 2; সংখ্যাটি কত ?

15. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল দশকস্থানীয় অঙ্কের 2 গুণ হয় এবং সংখ্যাটির সহিত 5 যোগ করিলে যোগফল দশকস্থানীয় অঙ্কটির 12 গুণ হয়। সংখ্যাটি কত ?

16. Aর বয়স Bর বয়সের দ্বিগুণ এবং Cর বয়স অপেক্ষা 4 বৎসর অধিক। তাহাদের তিন জনের বয়সের সমষ্টি 96 বৎসর হইলে, Bর বয়স কত ? (C. U. 1902)

17. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের $1\frac{1}{2}$ গুণ হইবে। পুত্রের বর্তমান বয়স কত ? (C. U. 1923)

18. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল; 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 2 গুণ হইবে। পিতার বর্তমান বয়স কত ? (C. U. 1947)

19. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল এবং 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 2 গুণ হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ? (C. U. 1940)

20. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ ছিল। 2 বৎসর পরে পিতার বয়সের দ্বিগুণ পুত্রের বয়সের 5 গুণের সমান হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ?

(C. U. 1923)

21. এমন একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার লব হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহার মান $\frac{1}{2}$ হয় এবং হরের সহিত 6 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{3}$ হয়। (C. U. 1858)

22. একটি ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হর 3 অধিক এবং লবের সহিত 7 যোগ করিলে ভগ্নাংশটির মান 1 অধিক হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

(C. U. 1931)

23. এমন একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার লব হইতে 1 বিয়োগ করিলে ও হরের সহিত 3 যোগ করিলে ভগ্নাংশটির মান $\frac{1}{2}$ হয় এবং লব হইতে 7 এবং হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটির মান $\frac{1}{3}$ হয়।

(C. U. 1928)

24. একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণের পরিসীমা 60 মিটার। ইহার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশী এবং প্রস্থ 3 মিটার কম হইলে উহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গ মিটার কম হইত। প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

25. একটি আয়তাকার ঘরের ক্ষেত্রফল যত, আয়তটির দৈর্ঘ্য 5 মিটার বেশী এবং প্রস্থ 2 মিটার কম হইলে অথবা উহার দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম এবং প্রস্থ 3 মিটার বেশী হইলে উহার ক্ষেত্রফলের কোন পরিবর্তন ঘটিত না। আয়তটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

26. একটি কাজ A ও B একত্রে 4 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে 3 দিন কাজ করিবার পর A চলিয়া গেল এবং B আরও 3 দিনে কাজটি শেষ করিল। A অথবা B কাজটি কত দিনে শেষ করিতে পারিত ?

27. A ও B একত্রে একটি কাজ 12 দিনে করিতে পারে। B একা 5 দিন কাজ করিবার পর A আসিয়া কাজে যোগ দিল এবং উভয়ে একত্রে কাজটি 10 দিনে শেষ করিল। A অথবা B কাজটি কত দিনে শেষ করিতে পারিত ?

28. 2 জন পুরুষ ও 3 জন বালক একটি কাজ 9 দিনে করিতে পারে এবং 3 জন পুরুষ ও 9 জন বালক ঐ কাজ 4 দিনে করিতে পারে। এক জন পুরুষ বা এক জন বালক ঐ কাজ কত দিনে করিতে পারে ?

29. একজন লোক দাঁড় বাহিয়া স্রোতের অস্থকূলে 10 ঘণ্টায় 70 কিলোমিটার গেল এবং স্রোতের প্রতিকূলে 70 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় কত ?

30. কলিকাতা হইতে নৈহাটি 24 কিলোমিটার। ঐ দুই স্থান হইতে দুই ব্যক্তি একই সময়ে রওনা হইয়া পরস্পরের অভিমুখে চলিলে 4 ঘণ্টায় মিলিত হয় কিন্তু একই দিকে চলিলে 16 ঘণ্টায় মিলিত হয়। প্রত্যেকের গতিবেগ প্রতি ঘণ্টায় কত ?

অপেক্ষকের এবং সরল সমীকরণের লেখচিত্র

60. অপেক্ষকের লেখচিত্র। যদি কোন রাশির মান অপর কোন একটি রাশির মানের উপর নির্ভর করে (অর্থাৎ, অপেক্ষা রাখে), তাহা হইলে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশিটির অপেক্ষক (Function) বলে। যেমন, x , $x+2$, $2x-3$, $3x^2-5x+6$ প্রভৃতি রাশি, x এর অপেক্ষক; কারণ উহাদের মান x এর মানের উপর নির্ভর করে। অপেক্ষক x এর ও সমীকরণ $y=x$ এর লেখ একই এবং অপেক্ষক $2x+3$ এর ও সমীকরণ $y=2x+3$ এর লেখ একই। সুতরাং x এর কোন অপেক্ষকের লেখ অঙ্কিত করিতে হইলে, ' $y=$ ঐ অপেক্ষক' ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিবে (উদা. 3, পৃ: 96 দেখ।)।

61. (1) সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের প্রণালী।

(i) প্রদত্ত সমীকরণটি হইতে তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ii) সুবিধামত একক লইয়া ছক-কাগজে বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর।

(iii) উহাদের যে কোনও দুইটি বিন্দু একটি সরলরেখা দ্বারা যোগ করিয়া

সরলরেখাটিকে উভয় দিকে বর্ধিত কর।

সরলরেখাটি তৃতীয় বিন্দুটি দিয়াও যাইবে। সুতরাং বর্ধিত অসীম সরলরেখাটিই উদ্দিষ্ট লেখচিত্র হইবে।

মন্তব্য। সরলরেখাটি যদি তৃতীয় বিন্দুটি দিয়া না যায়, তবে স্থানাঙ্ক নির্ণয়ে অথবা বিন্দু সংস্থাপনে ভুল হইয়াছে বুঝিবে। ছক-কাগজের দোষত্রুটির ফলেও ঐরূপ ভুল হইতে পারে। ছক-কাগজে কোন দোষত্রুটি থাকিলে তাহা সহজেই ধরা চলে (মন্তব্য, পৃ: 94 দেখ।)।

(2) লেখচিত্র অঙ্কনের কতিপয় কৌশল।

(i) এমন তিনটি বিন্দু লইবে, যেন উহাদের স্থানাঙ্ক সম্ভবস্থলে অখণ্ড সংখ্যা হয়। বিন্দু তিনটির জন্ম একই দৈর্ঘ্যের একক লইবে।

(ii) অঙ্কনের নিষ্ঠুরতার জন্ম বিন্দু তিনটিকে যথাসম্ভব দূরে দূরে লইবে।

(iii) মূলবিন্দুগামী সরলরেখার মূলবিন্দুকে একটি বিন্দুরূপে লইবে।

(iv) সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাদিগকে দুই বিন্দুরূপে লইলে অধিকাংশ স্থলে স্খবিধা হইবে। y -অক্ষের উপর অবস্থিত ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে, $x=0$ হইলে $y=কত$, নির্ণয় করিবে এবং x -অক্ষের উপর অবস্থিত ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে, $y=0$ হইলে $x=কত$, নির্ণয় করিবে।

(v) সমীকরণটিকে $y=mx+c$ এর আকারে পরিবর্তিত করিয়া লইলে স্থানাঙ্ক নির্ণয়ে স্খবিধা হইবে। এই আকারে প্রকাশিত সমীকরণে x -স্থানাঙ্ক প্রথমে লইয়া y -স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিবে। যদি কোন সমীকরণে x, y দ্বারা প্রকাশিত থাকে, তবে y -স্থানাঙ্ক প্রথমে লইয়া x -স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিবে।

62. একবর্ণ সরল সমীকরণের লেখচিত্র।

একটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের প্রণালী দেওয়া গেল :

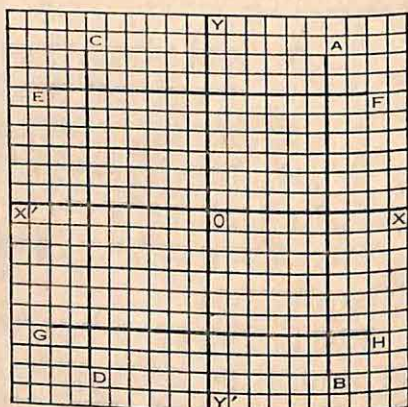
(1) $x=0$ এর লেখচিত্র y -অক্ষরেখা ; কারণ, y -অক্ষরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের কোটি যাহাই হউক না কেন, ভুজ বা $x=0$ ।

(2) $y=0$ এর লেখচিত্র x -অক্ষরেখা ; কারণ, x -অক্ষরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের ভুজ যাহাই হউক না কেন, কোটি বা $y=0$ ।

(3) $x=6$ এর লেখচিত্র, y -অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে $+6$ একক ব্যবধানে অবস্থিত AB সরলরেখা ; কারণ, ABর উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের কোটি যাহাই হউক না কেন, ভুজ বা $x=6$ ।

(4) $x=-6$ এর লেখচিত্র, y -অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে -6 একক ব্যবধানে অবস্থিত CD সরলরেখা ; কারণ, CDর উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের কোটি যাহাই হউক না কেন, ভুজ বা $x=-6$ ।

(5) $y=6$ এর লেখচিত্র, x -অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে $+6$ একক ব্যবধানে অবস্থিত EF সরলরেখা, কারণ EF এর উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের ভুজ যাহাই হউক না কেন, কোটি বা $y=6$ ।



(6) $y = -6$ এর লেখচিত্র, x -অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে -6 একক ব্যবধানে অবস্থিত GH সরলরেখা ; কারণ, GH এর উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের ভূজ যাহাই হউক না কেন, কোটি বা $y = -6$.

মন্তব্য। সাধারণভাবে, $x = a$ সমীকরণটির লেখচিত্র y -অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে a একক ব্যবধানে অবস্থিত এবং $y = b$ সমীকরণটির লেখচিত্র x -অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে b একক ব্যবধানে অবস্থিত। সুতরাং একবর্ণ সরল সমীকরণের লেখচিত্র x -অক্ষ, y -অক্ষ বা উহাদের সমান্তরাল সরলরেখা হইবে।

63. দ্বিবর্ণ সরল সমীকরণের লেখচিত্র।

(1) $y = mx$ এর আকারবিশিষ্ট সমীকরণের লেখচিত্র।

m এর মান যে কোন সংখ্যাই হউক না কেন, $y = mx$ এর লেখচিত্র মূলবিন্দু দিয়া যাইবে, কারণ $x = 0$ হইলে, $y = 0$ হয়। সুতরাং এই আকারের সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করিতে হইলে, মূলবিন্দু এবং রেখাটির উপর অবস্থিত অপর দুইটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিবে। বিন্দুত্রয়ের যে কোন দুইটি দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা তৃতীয় বিন্দু দিয়াও যাইবে। সুতরাং অঙ্কিত সরলরেখাই উদ্দিষ্ট লেখচিত্র হইবে।

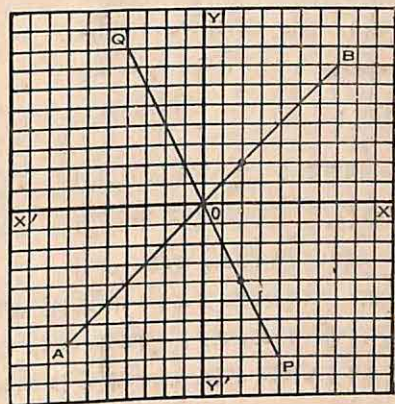
উদাহরণ 1. (i) $y = x$ এবং (ii) $y = -2x$ এর লেখচিত্র আঁক।

(i) প্রথম সমীকরণে,

$x = 0, 2, 5$ হইলে,

$y = 0, 2, 5$.

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া $(0, 0)$, $(2, 2)$ এবং $(5, 5)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর। $(0, 0)$ এবং $(2, 2)$ বিন্দুদ্বয় যোগ করিয়া উভয় দিকে বর্ধিত কর। বর্ধিত সরলরেখাটি $(5, 5)$ বিন্দু দিয়াও গেল। তাহা হইলে উৎপন্ন অসীম সরলরেখা ABই প্রথম সমীকরণের লেখচিত্র হইবে।



(ii) দ্বিতীয় সমীকরণে, $x = 0, 2, 3$ হইলে,
 $y = 0, -4, -6$.

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক লইয়া $(0, 0)$, $(2, -4)$ এবং $(3, -6)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর। $(0, 0)$ এবং $(2, -4)$ বিন্দুদ্বয় যোগ করিয়া উভয় দিকে বর্ধিত কর। বর্ধিত সরলরেখাটি $(3, -6)$ বিন্দু দিয়াও গেল। তাহা হইলে উৎপন্ন অসীম সরলরেখা PQই দ্বিতীয় সমীকরণের লেখচিত্র হইবে।

64. $y=mx+c$ এর আকারবিশিষ্ট সমীকরণের লেখচিত্র।

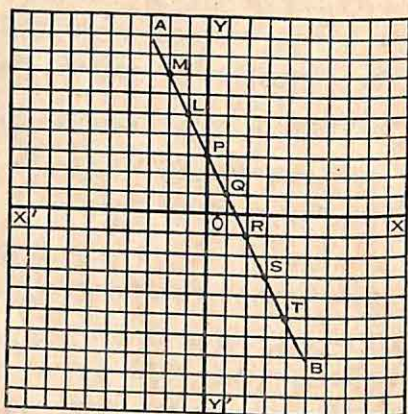
m এবং c এর মান যে কোন দুইটি সংখ্যাই হউক না কেন, $y=mx+c$ এর লেখচিত্র $(0, c)$ বিন্দু দিয়া যাইবে, কারণ $x=0$ হইলে $y=c$ হয়। সুতরাং $y=mx+c$ এর আকারবিশিষ্ট সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করিতে হইলে, $(0, c)$ কে একটি বিন্দুরূপে ব্যবহার করিলে সুবিধা হইবে। এইরূপ, $y=mx-c$ এর লেখচিত্র $(0, -c)$ বিন্দু দিয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. $y=-2x+3$ এর লেখচিত্র অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণে, $x=0, 1, 3$ হইলে,

$$y=3, 1, -3.$$

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া $(0, 3), (1, 1)$ এবং $(3, -3)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর। $(0, 3)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দুদ্বয় যোগ করিয়া উভয় দিকে বর্ধিত কর। বর্ধিত সরলরেখাটি তৃতীয় বিন্দু $(3, -3)$ দিয়াও গেল। তাহা হইলে উৎপন্ন অসীম সরলরেখা ABই উদ্দিষ্ট লেখচিত্র হইবে।



মন্তব্য। পূর্ব-নির্ণীত $(0, 3)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দুদ্বয় যেন যথাক্রমে P এবং Q লেখচিত্রটি হইতে দেখা যায়, P বিন্দু হইতে 2 একক নামিয়া 1 একক ডাইনে গেলে লেখচিত্রটির উপর অবস্থিত Q বিন্দুটি পাওয়া যায়। সুতরাং লেখটি সরলরেখা বলিয়া, Q হইতে 2 একক নামিয়া 1 একক ডাইনে গেলে লেখটির উপর অবস্থিত R বিন্দু পাওয়া যাইবে। এইরূপে, S এবং T বিন্দু পাওয়া যাইবে। আবার, Q হইতে 2 একক উপরে উঠিয়া 1 একক বামে গেলে পূর্ব-নির্ণীত P বিন্দু পাওয়া যায়। সুতরাং P হইতে 2 একক উপরে উঠিয়া 1 একক বামে গেলে লেখটির উপর অবস্থিত L বিন্দু পাওয়া যাইবে। এইরূপে M বিন্দুও পাওয়া যাইবে। সুতরাং কোন সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করিতে গিয়া দুইটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিলেই লেখটির উপর অবস্থিত অসংখ্য বিন্দুর অবস্থান লেখটি আঁকিবার পূর্বেই নির্ণয় করা যায় এবং ছক-কাগজে কোন দোষত্রুটি থাকিলে তাহা ধরা যায়।

65. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর আকারবিশিষ্ট এবং ঐ আকারে প্রকাশযোগ্য

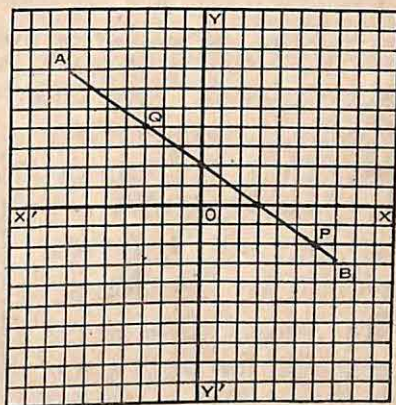
সমীকরণের লেখচিত্র।

a এবং b র মান যে কোন দুইটি সংখ্যাই হউক না কেন, $(x/a) + (y/b) = 1$ এর লেখচিত্র $(0, b)$ এবং $(a, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়া যাইবে; কারণ, $x=0$ হইলে $y=b$ এবং $y=0$ হইলে $x=a$ হয়। অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক সহজেই নির্ণয় করা যায় এবং উহাদ্বয়কে সংস্থাপন করাও সহজ। সুতরাং উল্লিখিত আকারের সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করিতে হইলে, অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত বিন্দু দুইটি লওয়া সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. $2x + 3y = 6$ এর লেখচিত্র অঙ্কিত কর। সমীকরণটিতে x এর মান 6 ধরিলে y এর মান কত এবং y এর মান 4 ধরিলে x এর মান কত লেখচিত্রটি হইতে নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করিলে, সমীকরণটি দাঁড়ায়, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ । এখন, $x=0$ হইলে $y=2$, $y=0$ হইলে $x=3$ এবং $x=-6$ হইলে $y=6$ ।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া $(0, 2)$, $(3, 0)$ এবং $(-6, 6)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর। $(0, 2)$ এবং $(3, 0)$ বিন্দুদ্বয় যোগ করিয়া উভয় দিকে বর্ধিত কর। বর্ধিত সরলরেখাটি তৃতীয় বিন্দু $(-6, 6)$



দিয়াও গেল। তাহা হইলে উৎপন্ন অসীম সরলরেখা ABই উদ্দিষ্ট লেখচিত্র হইবে।

লেখচিত্রটির P বিন্দুতে $x=6$ এবং $y=-2$; সুতরাং সমীকরণটিতে $x=6$ ধরিলে $y=-2$ হইবে। আবার, Q বিন্দুতে $y=4$ এবং $x=-3$; সুতরাং সমীকরণটিতে $y=4$ ধরিলে $x=-3$ হইবে।

উদাহরণ 2. $5x + 3y = 7$ এর লেখচিত্রটি আঁক। লেখচিত্রটির যে বিন্দুর x -স্থানাঙ্ক

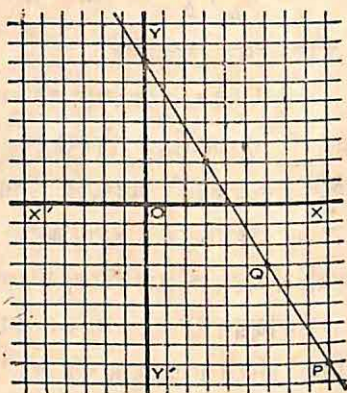
3, তাহার y -স্থানাঙ্ক কত এবং যে বিন্দুর y -স্থানাঙ্ক -1 , তাহার x -স্থানাঙ্ক কত?

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $(x/a) + (y/b) = 1$ এর আকারে প্রকাশ না করিয়াই লেখচিত্র আঁকা গেল।

প্রদত্ত সমীকরণে $x=0$ হইলে $y=\frac{7}{3}$, $x=1$ হইলে $y=\frac{2}{3}$ এবং $x=2$ হইলে $y=-1$; সুতরাং $(0, \frac{7}{3})$, $(1, \frac{2}{3})$ এবং $(2, -1)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন করিয়া লও।

এস্থলে y -স্থানাঙ্ক ভগ্নাংশ বলিয়া ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরলে সঠিকভাবে বিন্দু-সংস্থাপন করা কষ্টসাধ্য হইবে। কাজেই x ও y এর জন্য ছোট বর্গক্ষেত্রের তিন বাহুকে একক ধরিয়া লেখচিত্রটি আঁকা হইয়াছে।

লেখচিত্রটিতে P বিন্দুর x -স্থানাঙ্ক 3 এবং উহার y -স্থানাঙ্ক $-\frac{5}{2}$ এবং Q বিন্দুর y -স্থানাঙ্ক -1 এবং উহার x -স্থানাঙ্ক 2.

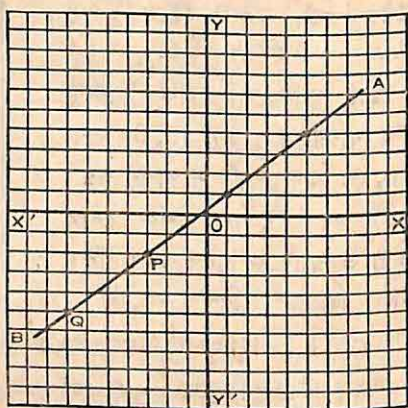


উদাহরণ 3. $\frac{3x+1}{4}$ এর লেখচিত্র অঙ্কিত

কর। $x = -3$ হইলে রাশিটির মান কত এবং রাশিটির মান -5 হইলে x এর মান কত লেখচিত্রটি হইতে নির্ণয় কর।

$\frac{3x+1}{4}$ এবং $y = \frac{3x+1}{4}$ এবং লেখচিত্র একই (অনু. 60); সুতরাং $y = \frac{3x+1}{4}$ এর লেখচিত্রটি অঙ্কিত করিতে হইবে। এখন, $x=1$ হইলে $y=1$ এবং $x=5$ হইলে $y=4$ এবং $x=-3$ হইলে $y=-2$.

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া (1, 1), (5, 4) এবং (-3, -2) বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর। (1, 1) এবং (5, 4) বিন্দুদ্বয় যোগ করিয়া উভয় দিকে বর্ধিত কর। বর্ধিত সরলরেখাটি তৃতীয় বিন্দু (-3, -2) দিয়াও গেল। তাহা হইলে উৎপন্ন অসীম সরলরেখা ABই উদ্দিষ্ট লেখচিত্র হইবে।



লেখচিত্রটির P বিন্দুতে $x = -3$ এবং $y = -2$; সুতরাং $x = -3$

হইলে y , অর্থাৎ $\frac{3x+1}{4}$ এর মান -2 হইবে। আবার, Q বিন্দুতে $y = -5$ এবং $x = -7$; সুতরাং y , অর্থাৎ $\frac{3x+1}{4}$ এর মান -5 হইলে x এর মান -7 হইবে।

প্রশ্নমালা 52

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর :

1. (i) $x=5$. (C. U. 1948) (ii) $y=7$. (C. U. 1944)
- (iii) $x+9=0$. (iv) $y+10=0$.

2. (i) $y=2x$. (C. U. 1944) (ii) $x=2y$. (C. U. 1939)
 (iii) $x=6y$. (C. U. 1946) (iv) $3x=2y$. (C. U. 1933)
 (v) $4x=3y$. (C. U. 1948) (vi) $3y=5x$. (C. U. 1936)
3. (i) $y=x-1$. (C. U. 1910) (ii) $y=x-2$. (C. U. 1913)
 (iii) $y=2x+7$. (C. U. 1946) (iv) $2x-y=1$. (C. U. 1933)
 (v) $y=4x+3$. (C. U. 1950) (vi) $y=5x+4$. (C. U. 1938)
4. (i) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. (C. U. 1936) (ii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$. (C. U. 1941)
 (iii) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$. (C. U. 1939) (iv) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$. (C. U. 1912)
 (v) $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$. (C. U. 1942) (vi) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$. (C. U. 1911)
5. (i) $2x+3y=6$. (C. U. 1942) (ii) $3x+4y=12$. (C. U. 1949)
 (iii) $3x+2y=24$. (C. U. 1937) (iv) $2y-3x=6$. (C. U. 1940)
 (v) $6x-7y=42$. (C. U. 1941) (vi) $x=\frac{1}{3}(2y+6)$. (C. U. 1941)
6. (i) $2x+3y=1$. (C. U. 1917) (ii) $5x+3y=8$. (C. U. 1940)
 (iii) $2y-x=7$. (C. U. 1948) (iv) $2y-3x=4$. (C. U. 1925)
 (v) $3x-4y=2$. (C. U. 1947) (vi) $2x+7y=-12$. (C. U. 1937)

7. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর :

- (i) x . (ii) $x-1$. (iii) $2x-3$.
 (iv) $\frac{x+1}{2}$. (v) $\frac{4x-1}{3}$. (vi) $\frac{5x-6}{4}$.

8. $x=-4$ হইতে $x=4$ পর্যন্ত $y=2x+1$ এর লেখচিত্র আঁক ।

9. $9x+4$ এর লেখচিত্রটি আঁক এবং $x=\frac{1}{3}$ হইলে, রাশিটির মান লেখচিত্রটি হইতে নির্ণয় কর । (D. B. 1942)

10. $\frac{3x+1}{4}$ এর লেখচিত্রটি আঁক এবং $x=9$ হইলে রাশিটির মান কত এবং রাশিটির মান -2 হইলে x এর মান কত লেখচিত্রটি হইতে নির্ণয় কর ।

11. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ এর লেখচিত্রটি আঁক এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য মাপিয়া

নির্ণয় কর ।

12. $3y-2x=4$ এর লেখচিত্রটি আঁক এবং x এর মান যথাক্রমে -2 , 1 এবং 4 লইয়া লেখচিত্রটির উপর বিন্দু সংস্থাপন কর । (C. U. 1916)

13. $2y-3x+1=0$ এর লেখচিত্রটি আঁক । সমীকরণটিতে x এর মান 3 ধরিলে, y এর মান কত এবং y এর মান -5 ধরিলে, x এর মান কত লেখচিত্রটি হইতে নির্ণয় কর ।

14. একই চিত্রে অর্থাৎ একই অক্ষ এবং একই একক লইয়া $3x - 2y = 6$ এবং $2x + 3y = 0$ এর লেখচিত্র আঁকিয়া দেখাও যে উহারা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

(C. U. 1912)

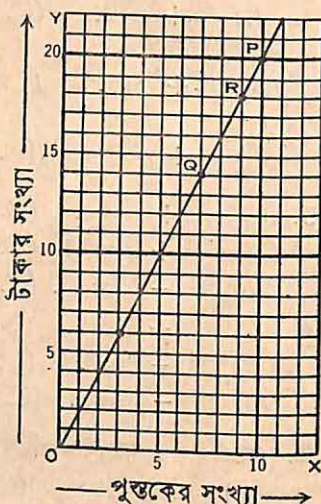
66. লেখচিত্রের প্রয়োগ।

উদাহরণ 1. একখানি পুস্তকের মূল্য 2 টাকা হইলে লেখ সাহায্যে (1) 7 খানি পুস্তকের মূল্য এবং (2) 18 টাকায় কত সংখ্যক পুস্তক পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, O মূলবিন্দু এবং x -অক্ষের উপর অবস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাছ '1 খানি পুস্তক' সূচিত করে এবং y -অক্ষের উপর অবস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাছ '1 টাকা' সূচিত করে।

এখন, পুস্তকের সংখ্যা 0, 1 ও 2 হইলে, উহাদের মূল্যের টাকার সংখ্যা যথাক্রমে 0, 2 ও 4. (0, 0), (1, 2) ও (2, 4) বিন্দুত্রয় সংস্থাপন করিয়া OP লেখ আঁক। লেখটি একটি সরলরেখা হইল।

(1) OPর উপর অবস্থিত Q বিন্দুর ভূজ 7 এককে 7 খানি পুস্তক সূচিত করে এবং উহার কোটি 14 এককে ঐ 7 খানি পুস্তকের মূল্য 14 টাকা সূচিত করে।



∴ 7 খানি পুস্তকের মূল্য 14 টাকা।

(2) R বিন্দুর কোটি 18 এককে 18 টাকা সূচিত করে এবং উহার ভূজ 9 এককে ঐ 18 টাকা মূল্যের 9 খানি পুস্তক সূচিত করে।

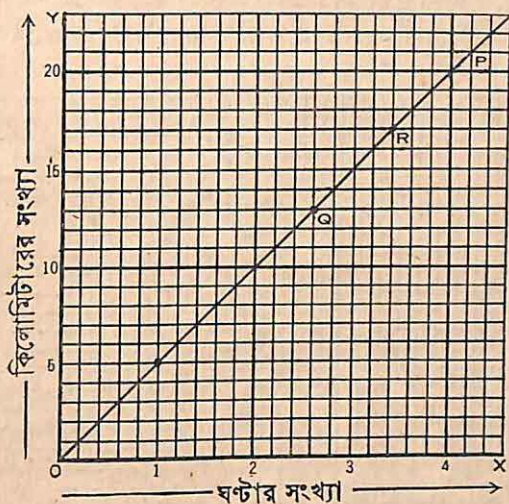
∴ 18 টাকায় 9 খানি পুস্তক পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য। OP সরলরেখাকে পুস্তকের মূল্য-লেখ (Price-graph) বলে।

উদাহরণ 2. এক ব্যক্তি কোন স্থান হইতে ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার গতিতে ভ্রমণ করিতে আরম্ভ করিল। লেখ সাহায্যে (1) 2 ঘণ্টা 36 মিনিটে সে কত কিলোমিটার ভ্রমণ করিবে এবং (2) 17 কিলোমিটার ভ্রমণ করিতে তাহার কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

মনে কর, O মূল বিন্দু এবং x -অক্ষের উপর অবস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের 5 বাছ '1 ঘণ্টা' (বা 1 বাছ 12 মিনিট) সূচিত করে এবং y -অক্ষের উপর অবস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাছ '1 কিলোমিটার' সূচিত করে।

এখন, ঘণ্টার সংখ্যা 0, 1 ও 2 হইলে, অতিক্রান্ত কিলোমিটারের সংখ্যা যথাক্রমে 0, 5 ও 10. (0, 0), (1, 5) ও (2, 10) বিন্দুত্রয় সংস্থাপন করিয়া OP লেখ আঁক। লেখটি একটি সরলরেখা হইল।



(1) OPর উপর অবস্থিত Q বিন্দুর ভূজ 2 ঘণ্টা 36 মিনিট স্থচিত করে এবং উহার কোটি 13 এককে 13 কিলোমিটার স্থচিত করে।

∴ লোকটি 2 ঘণ্টা 36 মিনিটে 13 কিলোমিটার ভ্রমণ করে।

(2) R বিন্দুর কোটি 17 এককে 17 কিলোমিটার স্থচিত করে এবং উহার ভূজ 3 ঘণ্টা 24 মিনিট স্থচিত করে।

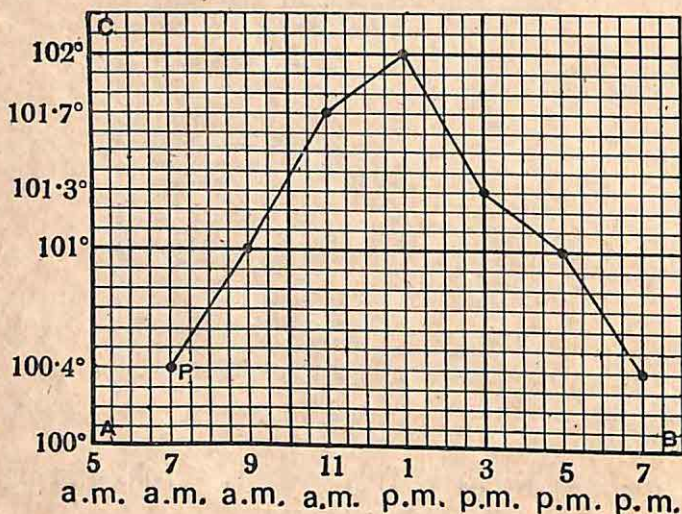
∴ 17 কিলোমিটার ভ্রমণ করিতে লোকটির 3 ঘণ্টা 24 মিনিট লাগিবে।

মন্তব্য। OP সরলরেখাকে ঐ ব্যক্তির গতি-লেখ (Motion-graph) বলে।

উদাহরণ 3. এক রোগীর কোনও একদিনের শরীরের উষ্ণতা 7 a.m. হইতে 7 p.m. পর্যন্ত 2 ঘণ্টা অন্তর অন্তর লওয়া হইল। উষ্ণতার পরিমাণ যদি যথাক্রমে $100^{\circ}4'$, 101° , $101^{\circ}7'$, 102° , $101^{\circ}3'$, 101° এবং $100^{\circ}4'$ হয়, তবে ঐ রোগীর শরীরের উষ্ণতাজ্ঞাপক একটি লেখচিত্র আঁক।

অনুভূমিক রেখা AB এবং উল্লম্বরেখা AC টান। মনে কর, AB বরাবর প্রত্যেক ছোট বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু '1 ঘণ্টা' প্রকাশ করে এবং AC বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের দশ বাহু '1 ডিগ্রী উষ্ণতা' প্রকাশ করে। 100° হইতে আরম্ভ করিয়া ডিগ্রীর পরিমাণগুলিকে এবং 5 a.m. হইতে আরম্ভ করিয়া সময়জ্ঞাপক রাশিগুলিকে যথাস্থানে লিখ।

এখন 100.4° সূচক দাগ হইতে ACর উপর এবং 7 a.m. সূচক দাগ হইতে ABর উপর লম্ব টানিলে যদি উহারা 'P' বিন্দুতে ছেদ করে, তবে P পর্যন্ত অঙ্কিত অনুভূমিক লম্বটি 7 a.m. প্রকাশ করিবে এবং P পর্যন্ত অঙ্কিত উল্লম্ব লম্বটি 7 a.m. সময়ের উষ্ণতা 100.4° প্রকাশ করিবে। তাহা হইলে P বিন্দুটি উদ্দিষ্ট লেখচিত্রের উপর অবস্থিত। উদ্দিষ্ট লেখচিত্রের উপর অবস্থিত অপর 6টি বিন্দুও নির্ণয় কর। P



হইতে আরম্ভ করিয়া বিন্দুগুলিকে সরলরেখা দ্বারা পর পর যোগ কর। তাহা হইলে উদ্দিষ্ট লেখচিত্রটি অঙ্কিত হইল।

যে যে সময়ে উষ্ণতা লওয়া হইয়াছিল, তাহাদের কোন্ সময়ে কত উষ্ণতা ছিল 'বা' ঐ উষ্ণতা কোন্ সময়ে ছিল, তাহা লেখচিত্রটি হইতে পাওয়া যায়।

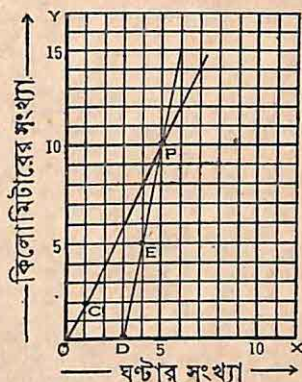
পর পর দুইটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা যোগ করায় প্রকারান্তরে ইহাই ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে, মধ্যবর্তী 2 ঘণ্টা সময়ে শরীরের উষ্ণতা সমহারে পরিবর্তিত হইয়াছে। এইরূপ ধারণা কতকটা সত্য হইলেও একেবারে নিভুল বলা চলে না।

উদাহরণ 4. A ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার গতিতে O হইতে চলিতে আরম্ভ করিল। 3 ঘণ্টা পরে B ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার গতিতে একই স্থান হইতে একই দিকে চলিতে আরম্ভ করিল। কখন এবং কোথায় তাহারা একত্র মিলিত হইবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

মনে কর, O মূলবিন্দু এবং x-অক্ষের উপর অবস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু '1 ঘণ্টা' সূচিত করে এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু '1 কিলোমিটার' সূচিত করে।

O হইতে A রওনা হইয়া প্রতি ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার গতিতে চলিতে লাগিল। সুতরাং C বিন্দুর ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে 1 ঘণ্টা এবং 2 কিলোমিটার স্থচিত করে বলিয়া, বর্ধিত OC সরলরেখা Aর গতি-লেখ হইবে।

A রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পরে B রওনা হইল। এই 3 ঘণ্টায় B মোটেই চলে নাই। সুতরাং D বিন্দুর ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে 3 ঘণ্টা এবং 0 কিলোমিটার স্থচিত করে বলিয়া, OD সরলরেখা হইবে Bর প্রথম 3 ঘণ্টার গতি-লেখ। তৎপর সে প্রতি ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার গতিতে চলিতে লাগিল। সুতরাং D বিন্দুকে মূলবিন্দু বলিয়া মনে করিলে E বিন্দুর ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে 1 ঘণ্টা এবং 5 কিলোমিটার স্থচিত করে বলিয়া বর্ধিত DE সরলরেখা হইবে Bর প্রথম 3 ঘণ্টার পরবর্তী সময়ের গতি-লেখ।



OC এবং DE গতি-লেখদ্বয় যেন পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P বিন্দুর ভুজ 5 এককে 5 ঘণ্টা এবং উহার কোটি 10 এককে 10 কিলোমিটার স্থচিত করে। সুতরাং A রওনা হওয়ার 5 ঘণ্টা পরে এবং O হইতে 10 কিলোমিটার দূরে A এবং B পরস্পর মিলিত হইবে।

উদাহরণ 5. 30 কিলোমিটার ব্যবধানে অবস্থিত O এবং O' দুইটি স্থান। A, O হইতে O' অভিমুখে রওনা হইল এবং ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার গতিতে 4 ঘণ্টা চলিয়া 3 ঘণ্টা বিশ্রাম করিল এবং পরে ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার গতিতে চলিতে লাগিল। A রওনা হওয়ার 4 ঘণ্টা পরে B, O' হইতে O অভিমুখে ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার গতিতে চলিতে লাগিল। কখন এবং কোথায় তাহারা মিলিত হইবে তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

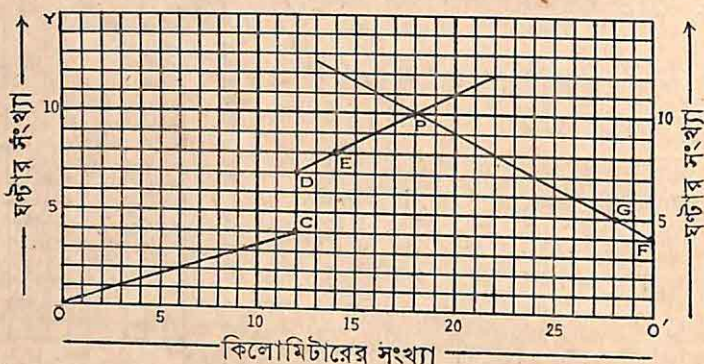
মনে কর, O মূলবিন্দু এবং ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু x -অক্ষের উপর 1 কিলোমিটার এবং y -অক্ষের উপর 1 ঘণ্টা স্থচিত করে।

(1) A, O হইতে O' অভিমুখে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার গতিতে 4 ঘণ্টায় 12 কিলোমিটার গেল। সুতরাং C বিন্দুর ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে 12 কিলোমিটার এবং 4 ঘণ্টা স্থচিত করে বলিয়া OC সরলরেখা হইবে Aর প্রথম 4 ঘণ্টার গতি-লেখ।

তৎপরবর্তী 3 ঘণ্টাকাল A মোটেই চলে নাই। সুতরাং C বিন্দুকে মূলবিন্দু বলিয়া মনে করিলে D বিন্দুর ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে 0 কিলোমিটার এবং 3 ঘণ্টা স্থচিত করে বলিয়া CD সরলরেখা হইবে Aর বিশ্রামকালীন 3 ঘণ্টা সময়ের গতি-লেখ।

তৎপর A প্রতি ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার গতিতে O' অভিমুখে চলিতে লাগিল। সুতরাং D বিন্দুকে মূলবিন্দু বলিয়া মনে করিলে E বিন্দুর ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে

2 কিলোমিটার এবং 1 ঘণ্টা স্থচিত করে বলিয়া বর্ধিত DE সরলরেখা হইবে Aর বিশ্রামকালীন সময়ের পরবর্তী সময়ের গতি-লেখ।



(2) A রওনা হওয়ার 4 ঘণ্টা পরে B, O' হইতে O অভিমুখে রওনা হইল। এই 4 ঘণ্টায় B মোটেই চলে নাই। সুতরাং O' বিন্দুকে মূলবিন্দু বলিয়া মনে করিলে F বিন্দুর ভূজ এবং কোটি যথাক্রমে 0 কিলোমিটার এবং 4 ঘণ্টা স্থচিত করে বলিয়া OF সরলরেখা হইবে Bর বিশ্রামকালীন প্রথম 4 ঘণ্টার গতি-লেখ।

তৎপর সে প্রতি ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার গতিতে O অভিমুখে চলিতে লাগিল। সুতরাং F বিন্দুকে মূলবিন্দু বলিয়া মনে করিলে G বিন্দুর ভূজ এবং কোটি যথাক্রমে 2 কিলোমিটার এবং 1 ঘণ্টা স্থচিত করে বলিয়া, বর্ধিত FG হইবে Bর বিশ্রামকালীন সময়ের পরবর্তী সময়ের গতি-লেখ।

DE এবং FG গতি-লেখদ্বয় যেন পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P বিন্দুর ভূজ এবং কোটি যথাক্রমে 18 কিলোমিটার এবং 10 ঘণ্টা স্থচিত করে। সুতরাং O হইতে 18 কিলোমিটার দূরে এবং A রওনা হওয়ার 10 ঘণ্টা পরে A এবং B পরস্পর মিলিত হইবে।

প্রশ্নমালা 53

1. 2 টাকায় 1 কিলোগ্রাম হিসাবে চাউল বিক্রয় হয়। 10 কিলোগ্রাম পর্যন্ত চাউলের মূল্য দেখাইয়া একটি মূল্য-লেখ আঁক। লেখটি হইতে (i) 5 কিলোগ্রামের মূল্য এবং (ii) 14 টাকায় কত কিলোগ্রাম চাউল পাওয়া যাইবে নির্ণয় কর।

2. এক ব্যক্তি কোন স্থান হইতে ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার গতিতে চলিতে আরম্ভ করিল। যে কোন সংখ্যক ঘণ্টায় সে যে দূরত্ব অতিক্রম করে, তাহা দেখাইয়া একটি গতি-লেখ আঁক। (i) 4 ঘণ্টায় সে কত কিলোমিটার চলিবে এবং (ii) 18 কিলোমিটার চলিতে তাহার কত সময় লাগিবে তাহা লেখটি হইতে নির্ণয় কর।

3. এক রোগীর কোন এক দিনের শরীরের উষ্ণতা 6 a.m. হইতে 9 p.m. পর্যন্ত 3 ঘণ্টা অন্তর অন্তর লওয়া হইল। উষ্ণতার পরিমাণ যদি যথাক্রমে $100^{\circ}6'$, $101^{\circ}2'$, $102^{\circ}3'$, $102^{\circ}5'$, $101^{\circ}6'$ এবং $100^{\circ}3'$ হয় তবে ঐ রোগীর শরীরের উষ্ণতাজ্ঞাপক একটি লেখচিত্র আঁক। 4 p.m. এর সময় ঐ রোগীর শরীরের উষ্ণতা আনুমানিক কত ছিল লেখটি হইতে নির্ণয় কর।

4. এক কর্মচারীর বেতন প্রতি বৎসর কোন নির্দিষ্ট পরিমাণে বাড়ে। তাহার চাকুরির 5 বৎসর পর তাহার বেতন 120 টাকা এবং 12 বৎসর পর 176 টাকা হইল। একটি লেখ আঁক যাহা হইতে তাহার যে কোন বৎসরের বেতন বলা যায় এবং ইহা হইতে (i) তাহার প্রারম্ভিক বেতন, এবং (ii) 21-তম বৎসরে সে যে বেতন পাইবে, তাহা নির্ণয় কর। (D. B. 1945)

5. এক বানর 9 মিটার উচ্চ একটি তৈলাক্ত খুঁটি বাহিয়া উঠিতে গিয়া এক সেকেন্ডে 3 মিটার উঠিয়া পরবর্তী সেকেন্ডে পিছলাইয়া 1 মিটার নামিয়া পড়ে। খুঁটির মাথায় উঠিতে তাহার কত সময় লাগিবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

6. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার গতিতে চলিতে লাগিল। 2 ঘণ্টা পরে 1 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার গতিতে চলিতে আরম্ভ করিল। তাহার চলার গতি-লেখ আঁক।

7. A ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার গতিতে চলিতে আরম্ভ করিল। 4 ঘণ্টা পরে B একই স্থান হইতে একই দিকে ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার গতিতে চলিতে আরম্ভ করিল। কখন এবং কোথায় তাহারা একত্র মিলিত হইবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

8. পূর্বাহ্ন 10টায় এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার গতিতে চলিতে আরম্ভ করিল। 2 ঘণ্টা পরে তাহার পুত্র তাহার দিকে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার গতিতে সাইকেলে চলিতে লাগিল। কখন এবং কোথায় পুত্র পিতাকে ধরিবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর। (A. U. 1943)

9. A ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার করিয়া চলে কিন্তু প্রত্যেক ঘণ্টার শেষে 18 মিনিট বিশ্রাম করে। A রওনা হওয়ার 2 ঘণ্টা পরে B ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার গতিতে Aর দিকে রওনা হইল। কখন এবং কোথায় তাহারা মিলিত হইবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর। (N. U. 1947)

10. একটি মেল ট্রেন হাওড়া হইতে রাত্রি 9টায় রওনা হইয়া 72 কিলোমিটার দূরে অবস্থিত খজাপুরে রাত্রি 11টায় পৌঁছিল এবং একটি যাত্রীবাহী ট্রেন খজাপুর হইতে রাত্রি 7টায় রওনা হইয়া রাত্রি 11টায় হাওড়া পৌঁছিল। কখন এবং কোথায় উহারা মিলিত হইয়াছিল তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর। (S. F. 1955 Addl.)

11. মধ্যাহ্নে A, P হইতে 40 কিলোমিটার দূরে অবস্থিত Qর দিকে সাইকেলে রওনা হইল। সে ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার গতিতে সাইকেল চালায় এবং 12 কিলোমিটার চালাইয়া এক ঘণ্টা বিশ্রাম করে। অপরাহ্ন 3টায় B, P হইতে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার গতিতে রওনা হইল। (a) কখন এবং কোথায় B, A কে ধরিবে এবং (b) অপরাহ্ন 5টায় তাহাদের ব্যবধান কত হইবে তাহা লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর। (A. U. 1945)

12. X ও Y দুই বন্ধু পরস্পর মিলিত হওয়ার জন্য যথাক্রমে A ও B স্থানদ্বয় পরিত্যাগ করিল। X সকাল 9টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 12 কিলোমিটার গতিতে এবং Y সকাল 11টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার গতিতে চলিল। তাহারা মধ্যাহ্ন 12টা 20 মিনিটে মিলিত হইল। তাহাদের ভ্রমণের গতি-লেখদ্বয় আঁক এবং উহা হইতে A ও Bর ব্যবধান নির্ণয় কর। (N. U. 1948)

উত্তরমালা

(বীজগণিত)

প্রশ্নমালা 1

1. $x^3 - 1$.
2. $8a^3 + 27$.
3. $27a^3 - 8b^3$.
4. $6x^4 - 17x^3 + 15x^2 - 7x + 4$.
5. $12x^4 + 7x^3y - 20x^2y^2 + 10xy^3 - 3y^4$.
6. $2a^2 + 3ab + a - 2b^2 + 7b - 3$.
7. $a^4 - a^3 - 2a^2 + 9a - 9$.
8. $x^4 + 4x^3y + 7x^2y^2 + 6xy^3 + 2y^4$.
9. $-5 + 8a - 11a^2 + 4a^3 + 19a^4 - 9a^5 - 6a^6$.
10. $1 + x^2 - x^4 - x^6$.
11. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
12. $x^3 + (c-a)x^2 + (b-ac)x + bc$.
13. $apx^3 + (bp+aq)x^2 + (bq-cp)x - cq$.
14. $x^4 - b^2x^2 + 2bcx - c^2$.

প্রশ্নমালা 2

1. $2x - 3y$.
2. $4x - 3y$.
3. $3 - 11x + 6x^2$.
4. $x^2 + x + 1$.
5. $2x^2 + 5x - 3$.
6. $4x^2 + 6x + 9$.
7. $a^3 - 2a^2 + 4a - 8$.
8. $8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$.
9. $16a^4 - 8a^3 + 4a^2 - 2a + 1$.
10. $2x - 1$.
11. $a + b$.
12. $3x - 2$.
13. $1 - 2x + 3x^2$.
14. $x^2 - 3x + 2$.
15. $x^2 - 2x + 4$.
16. $a^2 + ab + b^2$.
17. $x^2 - 2x + 2$.
18. $a^2 + 2ab + 2b^2$.
19. $a^4 - a^3b + ab^3 - b^4$.
20. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.
21. $a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc$.
22. $x^2 + y^2 + 1 + xy - x + y$.

প্রশ্নমালা 3

1. $x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2$.
2. $x^2 - (a-b)^2$.
3. $x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$.
4. $x^3 + (a-b-c)x^2 - (ab+ac-bc)x + abc$.
5. $x + b$.
6. $x - a$.
7. $a^2 - a(b+c) + bc$.
8. $x^2 + (b+c)x + bc$.
9. $x + b$.
10. $x + a$.
11. $a + (b+c)$.
12. $a^2 - a(b+c) + (b^2 - bc + c^2)$.

প্রশ্নমালা 4

1. $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$.
2. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$.
3. $8a^6 + 36a^4b^2 + 54a^2b^4 + 27b^6$.

$$4. a^3 + 8b^3 + c^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 12b^2c + 6bc^2 + 12abc.$$

$$5. 1003003001.$$

$$6. 8036054027.$$

$$7. 2x^3 + 9x^2 + 15x + 9.$$

$$8. 19a^3 + 42a^2b + 30ab^2 + 7b^3.$$

$$9. -35.$$

$$11. -2.$$

প্রশ্নমালা 5

$$1. (a+2)^3. \quad 2. (x+3)^3. \quad 3. (a+4)^3. \quad 4. (2a+5b)^3.$$

$$5. 0. \quad 6. 8. \quad 7. 0. \quad 10. 8a^3.$$

$$11. x^3 + 3x^2 + 3x + 1. \quad 12. 8(8 + 12x + 6x^2 + x^3).$$

$$13. 27a^3. \quad 14. 8(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

প্রশ্নমালা 6

$$1. 1 - 9a + 27a^2 - 27a^3. \quad 2. 64x^3 - 144x^2 + 108x - 27.$$

$$3. 27m^3 - 108m^2n + 144mn^2 - 64n^3.$$

$$4. a^3x^6 - 3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6.$$

$$5. x^3 - y^3 + z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z - 3yz^2 - 6xyz.$$

$$6. 2x(x^2 + 3). \quad 7. 18b(4a^2 + 3b^2). \quad 8. 26. \quad 11. 36.$$

প্রশ্নমালা 7

$$1. (a-2)^3. \quad 2. (x-4)^3. \quad 3. (2a-3b)^3. \quad 4. (3x-4y)^3.$$

$$5. 0. \quad 6. -1. \quad 7. 0. \quad 8. -34.$$

$$9. 0. \quad 12. 8b^3. \quad 13. x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

$$14. x^3 + 3x^2 + 3x + 1. \quad 15. 64x^3.$$

$$16. 8(b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3).$$

প্রশ্নমালা 8

$$1. x^3 + 1. \quad 2. x^3 + 8. \quad 3. 8a^3 + 27.$$

$$4. a^3 + 27b^3. \quad 5. 8x^3 + 27y^3. \quad 6. 125a^3 + 64b^3.$$

$$7. 8a^3b^3 + 27c^3. \quad 8. 27x^6 + 8y^3. \quad 9. 37. \quad 10. x^3 - z^3$$

প্রশ্নমালা 9

$$1. x^3 - 1. \quad 2. x^3 - 8. \quad 3. 8a^3 - 1. \quad 4. a^3 - 27b^3.$$

$$5. 8x^3 - 27y^3. \quad 6. a^3b^3 - 8c^3. \quad 7. 27a^6 - 64b^3.$$

$$8. 8a^3b^3 - 27c^3d^3. \quad 9. 19. \quad 10. 0.$$

প্রশ্নমালা 10

$$1. (x+1)(x^2 - x + 1). \quad 2. (a+2)(a^2 - 2a + 4).$$

$$3. (a-2b)(a^2 + 2ab + 4b^2). \quad 4. (x+4y)(x^2 - 4xy + 16y^2).$$

$$5. (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2). \quad 6. a(3a-4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2).$$

$$7. (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

8. $(3x^2+5y^2)(9x^4-15x^2y^2+25y^4)$.
 9. $(2ab-5c^2)(4a^2b^2+10abc^2+25c^4)$.
 10. $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.
 11. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$.
 12. $(x+2y^2)(x-2y^2)(x^2-2xy^2+4y^4)(x^2+2xy^2+4y^4)$.
 13. $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.
 14. $2a(a^2+3b^2)$. 15. $(x+1)(19x^2+23x+7)$.

প্রশ্নমালা 11

1. $(x+1)(x+2)$. 2. $(x+1)(x+3)$. 3. $(x+1)(x+4)$.
 4. $(x+2)(x+3)$. 5. $(x-2)(x-3)$. 6. $(x-1)(x+6)$.
 7. $(x+1)(x-6)$. 8. $(x+1)(x+6)$. 9. $(x-1)(x-6)$.
 10. $(x-2)(x+3)$. 11. $(x-3)(x+2)$. 12. $(x-3)(x+4)$.
 13. $(x-2)(x-10)$. 14. $(x-3)(x+7)$. 15. $(x-7)(x+4)$.
 16. $(x+3)(x+12)$. 17. $(x-2)(x-20)$. 18. $(x+15)(x-3)$.
 19. $(a-16)(a+3)$. 20. $(a-6)(a-9)$. 21. $(a+20)(a-3)$.
 22. $(m-4)(m-16)$. 23. $(n+18)(n-4)$. 24. $(p-25)(p+3)$.
 25. $(a-8)(a-10)$. 26. $(a+42)(a-2)$. 27. $(a-10)(a+9)$.
 28. $(a+1)(a+96)$. 29. $(a-9)(a-11)$. 30. $(a-12)(a+10)$.
 31. $(x+2y)(x+4y)$. 32. $(x+6y)(x-2y)$. 33. $(x-y)(x-18y)$.
 34. $(x-3y)(x-7y)$. 35. $(x+6y)(x-5y)$. 36. $(x-5y)(x-7y)$.
 37. $(a-4b)(a-10b)$. 38. $(a-28b)(a+2b)$. 39. $(a-30b)(a+2b)$.
 40. $(p+2q)(p+36q)$. 41. $(p-2q)(p-38q)$. 42. $(p+q)(p-96q)$.
 43. $(a+1)(a-1)(a^2-2)$. 44. $(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)$.
 45. $(a+b)(a-b)(a+3b)(a-3b)$. 46. $(x+1)(x^2-x+1)(x^3+2)$.
 47. $(x-1)(x^2+x+1)(x^3-3)$.
 48. $(x-1)(x+2)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)$.
 49. $(x-y)(x-2y)(x^2+xy+y^2)(x^2+2xy+4y^2)$.
 50. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x^2+1)(x^2+4)$.
 51. $(x+1)(x-1)(x^2-2)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4+2x^2+4)$.
 52. $(x+1)^2(x-1)(x+3)$. 53. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$.
 54. $(a+1)(a+2)(a-2)(a-3)$. 55. $(a-1)(a-2)^2(a-3)$.
 56. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. 57. $(a+1)(a-1)(a-4)(a-6)$.
 58. $2a(3a-b)$. 59. $9y(x-y)$. 60. $2(x+y)(x-y)$.

প্রশ্নমালা 12

1. $(x+1)(2x+3)$. 2. $(x-1)(2x-3)$. 3. $(x+3)(2x-1)$.
 4. $(x-3)(2x+1)$. 5. $(x-1)(2x+3)$. 6. $(x+1)(2x-3)$.
 7. $(x+3)(2x+1)$. 8. $(x-3)(2x-1)$. 9. $(x-1)(2x+1)$.

10. $(x+1)(2x-1)$. 11. $(x+2)(3x-1)$. 12. $(x-1)(3x-2)$.
 13. $(x-1)(3x-4)$. 14. $(x-1)(3x+4)$. 15. $(x-4)(3x+1)$.
 16. $(x+3)(2x-5)$. 17. $(2x+1)(2x-3)$. 18. $(2-a)(3-2a)$.
 19. $(x+2)(4x+3)$. 20. $(x-2)(4x-3)$. 21. $(x-2)(4x+3)$.
 22. $(2x+1)(2x-7)$. 23. $(x+8)(4x-1)$. 24. $(2x+1)(2x-9)$.
 25. $(a-2)(6a-5)$. 26. $(a-1)(6a+11)$. 27. $(2-3a)(3+4a)$.
 28. $(2a+3)(3a-4)$. 29. $(a-1)(6a-13)$. 30. $(2a+7)(3a+2)$.
 31. $(a-3b)(4a-b)$. 32. $(a+6b)(4a-b)$. 33. $(a-2b)(5a-3b)$.
 34. $(a-b)(6a+7b)$. 35. $(2a-b)(3a+8b)$. 36. $(6a+b)(a-8b)$.
 37. $(3a-b)(2a+9b)$. 38. $(a-9b)(6a-b)$. 39. $(a+b)(8a-7b)$.
 40. $(x-8y)(8x-y)$. 41. $(m+3n)(8m-3n)$. 42. $(p+9q)(9p-q)$.
 43. $(a-b)(9a-10b)$. 44. $(a-11b)(9a-b)$. 45. $(a-4b)(10a+3b)$.
 46. $(x+1)(x-1)(2x^2+3)$. 47. $(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)$.
 48. $(x+y)(x-y)(2x+3y)(2x-3y)$.
 49. $(a+2b)(a-2b)(3a+b)(3a-b)$.
 50. $(a+1)(2a+1)(a^2-a+1)(4a^2-2a+1)$.
 51. $(x-1)(2x+1)(x^2+x+1)(4x^2-2x+1)$.
 52. $(x+2y)(2x-y)(x^2-2xy+4y^2)(4x^2+2xy+y^2)$.
 53. $(x+1)(x-1)(x^2+1)(2x^2+1)(2x^2-1)$.
 54. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(2x^2+2xy+y^2)(2x^2-2xy+y^2)$.
 55. $(x+y-1)(2x+2y-1)$. 56. $(a+1)(a-2)(2a^2-2a-1)$.
 57. $(x-y)^2(x+2y)(2x+y)$. 58. $(x+5)(5x+1)(5x^2+14x+20)$.

প্রশ্নমালা 13

1. $(x+a+1)(x+a-1)$. 2. $(x-a-1)(x-a+1)$.
 3. $(x+a+2)(x-a-1)$. 4. $(x+a+1)(x-a-2)$.
 5. $(a+b+2)(a+b+3)$. 6. $(x+y+3)(x+y-2)$.
 7. $(x-y-2)(x-y+3)$. 8. $(a-b-2)(2a+2b+1)$.

প্রশ্নমালা 14

1. $(a+b)(a-b)$. 2. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
 3. $(a+1)(a^2-a+1)$. 4. $(a-1)(a^2+a+1)$.
 5. $(a+2)(a^2-2a+4)$. 6. $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.
 7. $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.
 8. $(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$.

প্রশ্নমালা 15

1. $(x+1)^3$. 2. $(x+1)(x^2-3x+1)$.
 3. $(x^2+4x+1)(x^2-x+1)$. 4. $(x^2+x+1)(2x^2-3x+2)$.
 5. $(x-1)^2(x^2-3x+1)$. 6. $(x+1)^2(x^2-6x+1)$.

প্রশ্নমালা 16

1. $(x+1)^2(x+2)$.
2. $(x+1)(x+2)(x+3)$.
3. $(x-1)^2(x+3)$.
4. $(x+1)(x+2)(x-4)$.
5. $(x+2)(x-2)(x+3)$.
6. $(x-1)(x-2)(x+3)$.
7. $(x-1)(x+3)(2x+3)$.
8. $(x-y)(x-2y)(x+4y)$.
9. $(x-1)(2x-1)(2x+3)$.
10. $(x+1)(2x+3)(2x-5)$.
11. $(x+1)^3(x+2)$.
12. $(x+1)^2(x-2)^2$.
13. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$.

প্রশ্নমালা 17

1. $(a-b)(a+b-c)$.
2. $(x-y)(x+y+z)$.
3. $(a+3b)(a-3b+2c)$.
4. $(2a-3b)(2a+3b-2c)$.
5. $(4x+5y)(4x-5y+3m)$.
6. $(a+b)(a^2+ab+b^2)$.
7. $(a-b)(a^2-ab+b^2)$.
8. $(a+2)(a-1)(a-4)$.
9. $(2x-3)(x+3)(4x+3)$.
10. $(x+y)(x-y)^3$.
11. $(2a+1)(a^2+a+1)$.
12. $(x+3)(x^2+3)$.
13. $(a-1)(a^2+7a+19)$.
14. $(x+2)(x^2+7x+13)$.

প্রশ্নমালা 18

1. $(x+y)(x+y+1)$.
2. $(a+2b)(a+b+1)$.
3. $(x-3y)(x-2y+3)$.
4. $(2a-b)(2a-b-2)$.
5. $(x+y+z)(x+y-z+1)$.
6. $(x-2y+3z)(x+2y-3z-2)$.
7. $(2x-3y-4z)(2x-3y+4z+2)$.
8. $(x+1)(x-2)(x^2-x-4)$.
9. $x(x+1)(x^2+x-14)$.
10. $(x^2-5x+2)(x^2-5x+8)$.
11. $(x-2)(2x+3)(2x^2-x+3)$.

প্রশ্নমালা 19

1. $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab)$.
2. $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-yz+zx+xy)$.
3. $(a+b-1)(a^2+b^2+1+b+a-ab)$.
4. $(x-2y-1)(x^2+4y^2+1-2y+x+2xy)$.
5. $(2a-b-3)(4a^2+b^2+9-3b+6a+2ab)$.
6. $(x+2y-3z)(x^2+4y^2+9z^2+6yz+3zx-2xy)$.
7. $(a^2-a-1)(a^4+a^3+2a^2-a+1)$.
8. $(x^2+x+2)(x^4-x^3-x^2-2x+4)$.
9. $3(b-c)(c-a)(a-b)$.
10. $3x(x-1)(1-2x)$.
11. $3(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b)$.
12. $3(x+2y-3z)(y+2z-3x)(z+2x-3y)$.

13. $a^2+b^2+c^2-bc+ca+ab$. 14. $a^2+4b^2+c^2+2bc-ca+2ab$.
 15. $x^2+y^2+4-2y+2x+xy$. 16. $x^2+4y^2+9z^2-6yz+3zx+2xy$.
 17. $2a-3b+c$. 18. 0.

প্রশ্নমালা 20

1. $(y+z)(z+x)(x+y)$. 2. $-(b-c)(c-a)(a+b)$.
 3. $(b+c)(c+a)(a+b)$. 4. $(y+z)(z+x)(x+y)$.
 5. $(b+c)(c+a)(a+b)$. 6. $(y+z)(z+x)(x+y)$.

প্রশ্নমালা 21

1. $(x+y+z)(yz+zx+xy)$. 2. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$.
 3. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$. 4. $(x+y+z)(yz+zx+xy)$.
 5. $(a+b-c)(ab-bc-ca)$. 6. 66.

প্রশ্নমালা 22

1. $-(y-z)(z-x)(x-y)$. 2. $(b-c)(c-a)(a-b)$.
 3. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
 4. $-(y+z)(z+x)(x+y)(y-z)(z-x)(x-y)$.
 5. $(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.
 6. $-(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.
 7. $-(b-c)(c-a)(a-b)$. 8. 0.

প্রশ্নমালা 23

1. $5x^3y^2z^3$. 2. $6a^2b^2x^4$. 3. abc . 4. xy^2 .
 5. $3x^2y^2z^2$. 6. $4p^2q^2r$. 7. $9x^3y^4$. 8. $6y^3$.

প্রশ্নমালা 24

1. $a+1$. 2. $x-y$. 3. $x-y$. 4. $4(x+1)$.
 5. $x+2$. 6. $(a-1)(a^2+1)$. 7. $x-1$. 8. $x+1$.
 9. $2x+1$. 10. $x-3$. 11. x^2+1 . 12. $a^2b^2(x-2)$.
 13. $4x(x-2)$. 14. $x+3$. 15. $x+1$. 16. $x-3$.
 17. $x-2$. 18. $a+b+c$.

প্রশ্নমালা 25

1. $12a^2b^3$. 2. $36a^2x^3y^3$. 3. $30a^4b^3c^4$. 4. $48a^3b^3x^4y^4$.
 5. $a^3b^3c^3$. 6. $24abcxyz$. 7. $60a^2b^2c^4x^4y^4$.
 8. $72ab^2c^3dx^3y^4z^4$.

প্রশ্নমালা 26

1. $a^2(a-1)$.
2. $12x^2(x-y)$.
3. $(a+1)^2(a-1)$.
4. $2xy(3x+1)(3x-1)$.
5. $(x-1)(x+2)(x-3)$.
6. $(x-2)(2x+1)(3x-4)$.
7. $(x-a)(x+c)(x-c)$.
8. $x^2(x+2)(x-2)(x+4)$.
9. $24a^2b^2(a+b)^2(a-b)^3$.
10. $(1+a)(1-a)^2$.
11. $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$.
12. $(a-1)^2(a-2)(a^2+1)(a+1)$.
13. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
14. $(a+2b)(a+3b)(a-3b)(a+4b)$.
15. $(1+a)(1+b)(1+c)$.
16. $(a+b)(b+c)(c+a)$.
17. $(x-a)(x-b)(x-c)$.
18. $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2+b^2)$.
19. $x^2(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$.
20. $(x-1)(x+1)(2x+1)$.
21. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$.
22. $(a+b-c)^2(a-b+c)(a+b+c)$.

প্রশ্নমালা 27

1. $x-3$.
2. $3x+1$.
3. $x+2$.
4. $x-1$.
5. $x-1$.
6. $x-2$.
7. $x-2$.
8. x^2-2x-1 .
9. $2x+3$.
10. x^2-3x-4 .
11. x^2+1 .
12. x^2-3x+2 .
13. $2x+5$.
14. $x(x-1)$.
15. $2x(x-1)$.
16. x^2+x-2 .
17. x^3+3x+5 .
18. a^2-2a+3 .

প্রশ্নমালা 28

1. $x+1$.
2. $2x+1$.
3. $x-1$.
4. $x+1$.
5. $x+3$.

প্রশ্নমালা 29

1. $x^3+9x^2+26x+24$.
2. $2x^4-3x^3-2x^2-9x+18$.
3. $3x^4-2x^3-21x^2-4x+12$.
4. $12x^4+4x^3-21x^2-16x-3$.

প্রশ্নমালা 30

1. $x^3+3x^2-10x-24$.
2. $6x^3+11x^2-3x-2$.
3. $6x^3-13x^2-14x-3$.

প্রশ্নমালা 31

2. $x^2-12x+35$.
3. x^2+2x-3 , x^2-3x+2 .

প্রশ্নমালা 32

1. $\frac{2a}{3x}$.
2. $\frac{1}{2ax^2y^2}$.
3. $-\frac{4y}{3ax}$.
4. $-\frac{2ax^2}{5b^2y^2}$.
5. $\frac{a^2+ab+b^2}{a(a+b)}$.
6. $-\frac{1}{2+a}$.
7. $\frac{2}{x-2y}$.
8. $-\frac{2}{3}$.

9. $\frac{x+2}{x+4}$ 10. $\frac{1-2a}{1-4a}$ 11. $\frac{1-5x}{1+6x}$ 12. $\frac{a-b-c}{a+b-c}$
 13. $\frac{x+y}{x^2}$ 14. $\frac{x+3}{x-2}$ 15. $\frac{2x+1}{3x+2}$ 16. $\frac{2x-3y}{3x+y}$
 17. $\frac{2-3a}{3-4a}$ 18. $\frac{1}{x^2-y^2}$ 19. $\frac{x+a}{x-a}$ 20. $\frac{a+b-c}{a-b-c}$

প্রশ্নমালা 33

1. $\frac{6a}{12}, \frac{4b}{12}, \frac{3c}{12}$ 2. $\frac{3c}{abc}, \frac{4a}{abc}, \frac{5b}{abc}$
 3. $\frac{a^2x}{xyz}, \frac{b^2y}{xyz}, \frac{c^2z}{xyz}$ 4. $\frac{c(x+y)}{abc}, \frac{a(y+z)}{abc}, \frac{b(z+x)}{abc}$
 5. $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}, \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}, \frac{2ab(a^2-b^2)}{a^2-b^2}$ 6. $\frac{a+b}{a^2-b^2}, \frac{-2(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{3ab}{a^2-b^2}$

প্রশ্নমালা 34

1. $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$ 2. $\frac{2xy}{x^2-y^2}$ 3. $\frac{2-x}{1+x^2}$ 4. 0.
 5. 0. 6. 1. 7. 1. 8. $\frac{2a}{a^4-1}$
 9. 0. 10. 0. 11. $\frac{1}{a-1}$ 12. $\frac{16x^{15}}{x^{16}-1}$
 13. 0. 14. 0. 15. 0. 16. 0.
 17. 1. 18. 0.

প্রশ্নমালা 35

1. 0. 2. 0. 3. 0. 4. 0. 5. 0. 6. 0.
 7. 0. 8. 1. 9. 0. 10. $2(a^2+b^2+c^2)$. 11. 1.
 12. -1. 13. 0. 14. 1. 15. 0. 16. $\frac{1}{abc}$.
 17. $\frac{1}{abc}$. 18. 0.

প্রশ্নমালা 36

1. abc . 2. $\frac{2}{5}$. 3. 1. 4. $\frac{1}{a-b}$. 5. 1.
 6. $\frac{(a-b)^2}{a}$. 7. 1. 8. 1. 9. $\frac{a^2+b^2}{a}$. 10. 1.
 11. 1. 12. $\frac{a}{a+b}$. 13. 1. 14. 1. 15. 1. 16. 1.

প্রশ্নমালা 37

1. $\frac{ay}{bx}$ 2. $\frac{bz^2}{axy}$ 3. $\frac{x+3}{x-4}$ 4. $\frac{x+2}{x-1}$
5. 1. 6. $\frac{a}{b}$ 7. $\frac{a-2b}{2a+b}$ 8. $a(a^2+b^2)$
9. $\frac{a(a-b)}{b}$ 10. 1. 11. 1. 12. 1.
13. 1. 14. 1. 15. 1. 16. $(x+y)^2$.

প্রশ্নমালা 38

1. $\frac{1}{x}$ 2. 1. 3. 1. 4. x . 5. 1.
6. $\frac{1}{2}$ 7. $\frac{4b}{a}$ 8. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$ 9. 1. 10. x .

প্রশ্নমালা 42

1. $x=2a$. 2. $x=a+b$. 3. $x=a-b$. 4. $x=p+q$.
5. $x=a+b+c$. 6. $x=\frac{2ab}{a+b}$. 7. $x=\frac{6a}{7}$.
8. $x=1$. 9. $x=b$. 10. $x=a+b$.

প্রশ্নমালা 43

1. $x=1$. 2. $x=12$. 3. $x=4$.
4. $x=-(a+b+c)$. 5. $x=a+b+c$. 6. $x=ab+bc+ca$.
7. $x=-(a+b+c)$. 8. $x=-(a+b+c+abc)$. 9. $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.
10. $x=a^3+b^3+c^3-3abc$. 11. $x=a^3+b^3+c^3$.
12. $x=-(a^2+b^2+c^2)$. 13. $x=-(a^3+b^3+c^3)$.
14. $x=(a+b+c)^2$.

প্রশ্নমালা 44

1. $x=1$. 2. $x=2$. 3. $x=1\frac{5}{8}$. 4. $x=-4$. 5. $x=1$.
6. $x=b$. 7. $x=\frac{1}{ab}$. 8. $x=\frac{ab}{2(a+b)}$. 9. $x=\frac{b}{a}(a-b+c)$.
10. $x=-1\frac{1}{2}$. 11. $x=-2\frac{1}{2}$. 12. $x=6$.
13. $x=-2$. 14. $x=-\frac{2}{3}$. 15. $x=-1\frac{1}{2}$.
16. $x=7$. 17. $x=1\frac{1}{2}$. 18. $x=-1\frac{3}{5}$.
19. $x=3$. 20. $x=\frac{ab}{a-2b}$.

প্রশ্নমালা 45

1. $x=2$.
2. $x=1$.
3. $x=\frac{3}{5}$.
4. $x=-(a+b+c)$.
5. $x=a-2b$.
6. $x=\frac{ab}{a+b}$.
7. $x=1$.
8. $x=2$.
9. $x=1$.
10. $x=3$.
11. $x=-2$.
12. $x=6$.
13. $x=6$.
14. $x=6$.
15. $x=-1$.
16. $x=2$.
17. $x=5\frac{1}{2}$.
18. $x=4\frac{1}{2}$.
19. $x=13$.
20. $x=-6\frac{1}{2}$.
21. $x=3\frac{1}{3}$.
22. $x=2$.

প্রশ্নমালা 46

1. $x=1, y=2$.
2. $x=2, y=1$.
3. $x=3, y=1$.
4. $x=2, y=3$.
5. $x=1, y=-2$.
6. $x=-1, y=4$.
7. $x=1, y=2$.
8. $x=2, y=3$.
9. $x=2, y=3$.
10. $x=1, y=2$.

প্রশ্নমালা 47

1. $x=2, y=1$.
2. $x=2, y=3$.
3. $x=3, y=2$.
4. $x=-2, y=3$.
5. $x=3, y=-2$.
6. $x=-1, y=-2$.
7. $x=5, y=3$.
8. $x=5, y=2$.
9. $x=3, y=2$.
10. $x=1, y=1$.
11. $x=16, y=4$.
12. $x=5, y=1$.

প্রশ্নমালা 48

1. $x=2, y=1$.
2. $x=3, y=2$.
3. $x=2, y=-3$.
4. $x=2, y=3$.
5. $x=13, y=6$.
6. $x=4, y=-1$.
7. $x=5, y=6$.
8. $x=7, y=-4$.
9. $x=-7, y=-8$.
10. $x=3, y=1$.
11. $x=3, y=2$.
12. $x=5, y=9$.
13. $x=a, y=b$.
14. $x=a+2b, y=2a+b$.
15. $x=\frac{c(b-c)}{a(b-a)}, y=\frac{c(a-c)}{b(a-b)}$.
16. $x=b+a, y=b-a$.
17. $x=1\frac{2}{5}, y=2\frac{1}{2}$.
18. $x=\frac{1}{15}, y=18$.
19. $x=2, y=3$.
20. $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{3}$.
21. $x=4, y=10$.
22. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$.
23. $x=3, y=2$.
24. $x=3, y=4$.

প্রশ্নমালা 49

1. $x=2, y=3$.
2. $x=3, y=-2$.
3. $x=-2, y=3$.
4. $x=3, y=4$.
5. $x=-1, y=2$.
6. $x=2, y=-1$.
7. $x=-1, y=-1$.
8. $x=0, y=-1$.
9. $x=3, y=-4$.
10. $x=5, y=3$.
11. $x=10, y=15$.
12. $x=5, y=4$.
13. $x=7, y=9$.
14. $x=b+a, y=b-a$.

প্রশ্নমালা 50

1. 20. 2. 19, 42. 3. 27, 25. 4. 10, 12. 5. 13, 7.
6. 14, 17, 5. 7. 8, 11, 3, 36 8. 25 বৎসর। 9. 36.
10. 7500, 12500. 11. 1830 টাকা। 12. 80 টাকা। 13. 20, 60, 100.
14. 26 দিন। 15. 23. 16. 93. 17. 56.
18. 456. 19. 48 কি.মি.। 20. 210 কি.মি.।
21. 150 মিটার। 22. 35 কি.মি., 45 কি.মি.। 23. 75 মি., 45 কি.মি.।
24. $2\frac{1}{2}$ কি.মি.। 25. 24 মিটার। 26. 20 মিটার।
27. 20 লিটার, 15 লিটার। 28. 100. 29. 2448.
30. 7টা $38\frac{1}{11}$ মি.। 31. 3টা $49\frac{1}{11}$ মি.।
32. 4টা $5\frac{1}{11}$ মি., 4টা $38\frac{1}{11}$ মি.। 33. 1 ঘ. $5\frac{5}{11}$ মি.।
34. 80টি।

প্রশ্নমালা 51

1. 57, 27. 2. 40, 60. 3. 1215, 15.
4. 18, 5. 5. 36 টা., 45 টা.। 6. 57 টাকা।
7. 400 টাকা। 8. 10টি, 15টি। 9. 15, 150.
10. 120 টাকা, 24. 11. 75. 12. 56. 13. 72.
14. 42. 15. 43. 16. 20 বৎসর।
17. 24 বৎসর। 18. 70 বৎসর। 19. 68 বৎ., 32 বৎ.।
20. 38 বৎসর, 14 বৎসর। 21. $\frac{7}{8}$. 22. $\frac{4}{5}$. 23. $\frac{1}{2}$.
24. 17 মিটার, 13 মিটার। 25. 25 মিটার, 12 মিটার।
26. 6 দিন, 12 দিন। 27. 20 দিন, 30 দিন।
28. 36 দিন, 54 দিন। 29. 3 কি.মি.। 30. $2\frac{1}{2}$ কি.মি., $3\frac{3}{4}$ কি.মি.।

প্রশ্নমালা 52

9. 7. 10. 7, -3. 11. 5. 13. 4, -3.

প্রশ্নমালা 53

1. (i) 10 টাকা ; (ii) 7 কিলোগ্রাম। 2. (i) 12 কিলোমিটার ; (ii) 6 ঘণ্টা।
3. 102.2° . 4. (i) 80 টাকা ; (ii) 240 টাকা। 5. 7 সেকেন্ড।
7. A রওনা হওয়ার 10 ঘণ্টা পরে ; রওনা হওয়ার স্থান হইতে 30 কিলোমিটার দূরে।
8. অপরাহ্ন 5টায় ; যাত্রাশ্রম হইতে 35 কিলোমিটার দূরে।
9. A রওনা হওয়ার 4 ঘণ্টা 12 মিনিট পরে ; যাত্রাশ্রম হইতে 13.2 কিলোমিটার দূরে।
10. রাত্রি 9টা 40 মিনিট ; হাওড়া হইতে 24 কিলোমিটার দূরে।
11. (a) অপরাহ্ন 5টা 24 মিনিটে P হইতে 24 কিলোমিটার দূরে ;
(b) 4 কিলোমিটার।
12. 80 কিলোমিটার।

